Билјана Крстеска **Јасмина Маркоска**

МАТЕМАТИКА

за I година на средното стручно четиригодишно образование

Здравствена струка
Земјоделско ветеринарна струка
Лични услуги
Текстилно-кожарска струка
Шумарско-дрвопреработувачка струка

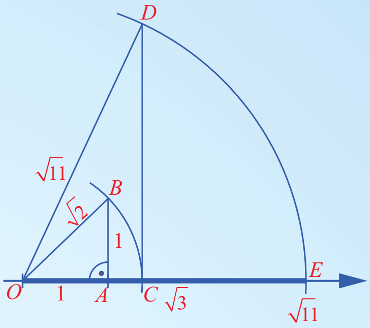
Скопје, 2021

Билјана Крстеска

Јасмина Маркоска

МАТЕМАТИКА

за I година на средното стручно четиригодишно образование



Здравствена струка

Земјоделско-ветеринарна струка

Текстилно-кожарска струка

Лични услуги

Шумарско-дрвопреработувачка струка

Билјана Крстеска　　　　Јасмина Маркоска

МАТЕМАТИКА

за I година на средното стручно четиригодишно образование

Здравствена струка
Земјоделско-ветеринарна струка
Лични услуги
Текстилно-кожарска струка
Шумарско-дрвопреработувачка струка

Скопје, 2021

Билјана Крстеска Јасмина Маркоска

МАТЕМАТИКА

за I година на средното стручно четиригодишно образование

(Здравствена струка, Земјоделско-ветеринарна струка, Лични услуги,
Текстилно-кожарска струка, Шумарско-дрвопреработувачка струка)

Рецензенти
Д-р Марија Оровчанец
Природно-математички факултет, Скопје
Виолета Пешевска
ССОУ„Киро Бурназ“, Куманово
Раде Кренков
СОУУД „Димитар Влахов“, Струмица

Издавач: Министерство за образование и наука на Република Северна Македонија

Стручна редакција: проф. д-р Џеваир Беќири

Илустрации: Авторите

Лектура: Виолета Јовановска
Графичко и техничко уредување: Арбериа Десигн - Тетово (Куштрим Арифи)

Со одлука за одобрување на учебникот МАТЕМАТИКА, за I година на средното стручно четиригодишно образование (Здравствена струка, Земјоделско-ветеринарна струка, Лични услуги, Текстилно-кожарска струка, Шумарско-дрвопреработувачка струка) бр. 26-2024/1 од 9.11.2020 година донесена од Националната комисија за учебници.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)

КРСТЕСКА, Билјана
Математика за I година на средното стручно четиригодишно образование : Електронски извор : Здравствена струка Земјоделско-ветеринарна струка Лични услуги Текстилно-кожарска струка Шумарско-дрвопреработувачка струка / Билјана Крстеска, Јасмина Маркоска. - Текст во ПДФ формат, содржи 172 стр., табели. - Скопје : Министерство за образование и наука на Република Северна Македонија, 2021

Начин на пристапување (URL): https://www.e-ucebnici.mon.gov.mk/. - Наслов преземен од екран. - Опис на изворот на ден 21.09.2021. - Библиографија: стр. 153

ISBN 978-608-273-017-2

1. Маркоска, Јасмина [автор]

COBISS.MK-ID 55004165

ПРЕДГОВОР

Учебникот **МАТЕМАТИКА** за прва година на средното стручно четиригодишно образование е пишуван според наставната програма за истоимениот задолжителен предмет. Наменет е за учениците од Здравствената струка, Земјоделско-ветеринарна струка, Лични услуги, Текстилно-кожарска струка и Шумарско-дрвопреработувачка струка.

Авторите настојуваа да ги обработат предвидените содржини во согласност со дидактичко-методското упатство за реализација на програмата. Учебникот е модуларно дизајниран и се состои од осум тематски целини:

- Математичка логика и множества
- Реални броеви
- Рационални алгебарски изрази
- Пропорционалност на величина
- Линеарни равенки, неравенки и системи линеарни неравенки
- Линеарна функција и систем линеарни равенки со две непознати
- Геометриски фигури во рамнина
- Плоштина и периметар на рамнински фигури

Во рамките на секоја наставна тема обработени се предвидените содржини, кои, по правило, се илустрирани со решени примери и цртежи. На крајот од секоја наставна единица дадени се задачи за самостојна работа на часот или за домашна работа, што претставува продолжување на работата на часот, а на крајот од секоја наставна тема дадени се задачи за повторување и утврдување на материјалот. Решенијата и одговорите на задачите, а по избор на авторите, некаде и упатство за нивно решавање, дадени се на крајот од учебникот.

Авторите однапред ќе бидат благодарни за секоја добронамерна критика или забелешка за подобрување на содржината, бидејќи веруваат дека оваа книга ќе придонесе учениците повеќе да ја засакаат математиката и да навлезат во нејзините тајни.

Март, 2020 Авторите

СОДРЖИНА

1. МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА И МНОЖЕСТВА

1.1. Поим за исказ

Луѓето секојдневно комуницираат со помош на реченици кои може да се расказни (декларативни), прашални, заповедни, извични...Од посебен интерес во математиката се декларативните реченици, за чии тврдења важи една од двете можности т.е. тврдењето е вистинито (точно) или невистинито (неточно).

Пример 1. Декларативни реченици се:

а) Скопје е главен град на нашата татковина

б) 1 е непарен број

в) $4<2$

г) $2^2+3^2=5^2$

и за нив знаеме дека се виситинити (како што се а) и б)) или невистинити (како што се в) и г)). ♦

Дефиниција. Декларативната реченица за која е можно да се утврди дали е вистинита или невистинита се вика **исказ**.

Не секоја декларативна реченица претставува исказ.

Пример 2. Речениците:

а) Математиката е најдобар предмет

б) Во петок сите се среќни

в) $5x-2>3$

не се искази, бидејќи содржат тврдења кои некогаш се вистинити,а некогаш невистинити. ♦

Задача 1. Одреди кои од дадените реченици се искази. Образложи го одговорот!

а) Два агли се суплементни ако и само ако нивниот збир е 180°

б) Септември е најубав месец од годината

в) $x+7=11$

г) 16 е прост број

Решение. а) е исказ кој е точен, б) не е исказ бидејќи за некои луѓе септември не е најубав месец, в) не е исказ бидејќи за $x=4$, важи $4+7=11$, а за $x=5$, $5+7\neq 11$, г) е исказ кој не е точен бидејќи прост број има точно два делители, а 16 има 5 делители. ♦

На секој исказ може да му се додели само една од вредностите: **вистина** (ознака: $\top$, читај: „те“) или **невистина** (ознака $\perp$, читај: „не те“). Тие вредности ги нарекуваме **вистинитосни вредности**, а за соодветните искази велиме дека се вистинити или невистинити.

Исказите најчесто ги означуваме со малите латински букви: $p,q,r,s,t,...$, а за вистинитосната вредност на некој исказ ја користиме буквата τ, читај: „тау“.

Пример 3. Ако p е исказот 1 е непарен број (пишуваме $p: 1$ е непарен број), тогаш записот $\tau(p) = \mathrm{T}$ ќе значи дека p е вистинит исказ. ♦

Задача 2. Утврди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $p: 122 - 11 = 12$

б) $q: 2x + 5 = 3$, за $x = -1$

в) $r: 2^4 = 4^2$

Решение. $\tau(p) = \perp$, $\tau(q) = \mathrm{T}$ и $\tau(r) = \mathrm{T}$.♦

Пример 4. Нека се дадени исказите $p: 2$ е парен број и $q: 2$ е делител на 10. Со нивна помош може да се образуваат речениците:

а) 2 не е делител на 10

б) 2 е парен број и 2 е делител на 10

в) 2 е парен број или 2 е делител на 10

г) Ако 2 е парен број, тогаш 2 е делител на 10

д) 2 е парен број ако и само ако 2 е делител на 10

Притоа во образувањето на речениците се искористени зборовите: „не“, „и“, „или“, „ако...,тогаш...“, „...ако и само ако ...“. Велиме дека на овој начин од **елементарните** (простите) искази p и q, сме ги образувале **сложените** искази. Постапката со која од елементарни искази добиваме сложени се вика **логичка операција**. ♦

Задачи

1. Кои од следниве реченици се искази?

а) Жолтата боја ја сакаат сите

б) $9 = 2 + x$

в) $9 = 2 + x$, за $x = 3$

г) $a + b = b + a$, за секои природни броеви a и b

2. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $2 | 15$

б) 19 е прост број

в) 45 е најмал заеднички содржател на 9 и 15

г) $\frac{3}{5} > \frac{5}{3}$

3. Одреди на што е еднакво:

а) $\tau\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{4+3}\right)$

б) $\tau(3 | 21)$

в) $\tau(-5 > -2)$

г) $\tau(0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6)$

4. Одреди кој од следниве искази е прост, а кој сложен?

а) Дијагоналите во секој ромб се заемно нормални и се преполовуваат

б) Аглите при основата на рамнокрак триаголник се еднакви

в) Еден број е делив со 5 ако завршува на 0 или 5

г) Бројот 14 е делив со 2, но не е делив со 4

1.2. Операции со искази

Негација

Честопати имаме потреба да запишеме тврдење кое е спротивно на друго тврдење. На тој начин образуваме нов исказ кој во себе содржи негација на тврдењето.

Пример 1. Нека $p: 7$ е парен број, е дадено тврдење. Спротивното тврдење се образува со негација, т.е. „Не е точно дека 7 е парен број“ или „7 не е парен број“ или „7 е непарен број“.♦

Во ваквите случаи велиме дека сме образувале **негација** на исказот p и запишуваме $\neg p$ (читај: „не p“).

Дефиниција. Негација на исказот p се вика исказот $\neg p$, кој е точен кога исказот p е неточен и обратно.

Со други зборови, ако $\tau(p)=\top$, тогаш $\tau(\neg p)=\perp$ и обратно. Според тоа може да ја составиме следната **таблица на вредностите на вистинитост** за негацијата:

$\tau(p)$	$\tau(\neg p)$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

или

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Пример 2. Нека е даден исказот $p: 5$ е прост број. Тогаш $\neg p$ е исказот „5 не е прост број“, а исказот $\neg\neg p$ е исказот „Не е точно дека 5 не е прост број“. Последниот исказ го тврди истото што го тврди и p, па важи дека $\neg\neg p = p$.♦

Задача 1. Направи негација на исказите:

а) $p:$Квадратот е правоаголник

б) $q: 2=3$

в) $r: 4$ е сложен број

г) $s: 5>8$

Решение. а) $\neg p:$ Квадратот не е правоаголник, **б)** $\neg q: 2\neq 3$, **в)** $\neg r: 4$ не е сложен број и **г)** $\neg s: 5$ не е поголем од 8 т.е. $5\leq 8$.♦

Задача 2. Изврши негација на следниве искази, а потоа одреди ја вистинитосната вредност на добиените негации:

а) $p: 0\in \mathbb{N}$

б) $q: \frac{1}{2}$ е рационален број

в) $r: -2<-1$

г) $s: 3\notin \mathbb{Q}$

Решение. а) $\neg p: 0 \notin \mathbb{N}, \tau(\neg p) = \top$, **б)** $\neg q: \frac{1}{2}$ не е рационален број, $\tau(\neg q) = \perp$, **в)** $\neg r: -2 \geq -1, \tau(\neg r) = \perp$, **г)** $\neg s: 3 \in \mathbb{Q}, \tau(\neg s) = \top$.♦

Конјункција

Нека се дадени исказите $p: 25$ е сложен број и $q: 5$ е делител на 25. Тогаш со помош на сврзникот и може да се образува исказот 25 е сложен број и 5 е делител на 25. На овој начин е добиен сложен исказ кој се нарекува **конјункција** на исказите p и q. Притоа запишуваме $p \wedge q$ (читај „p и q“).

Дефиниција. Конјункција на исказите p и q е сложен исказ кој се образува со помош на сврзникот „и“.

Конјункцијата е точен исказ само ако и двата искази се точни. Во спротивно е неточен исказ.

Таблицата на вредности на вистинитост на конјункцијата е:

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Задача 3. Дадени се исказите $p: 11 | 451$, $q: 3+1=5$ и $r: 3 \in \mathbb{N}$. Образувај ги исказите:

а) $p \wedge q$

б) $p \wedge r$

в) $q \wedge r$,

а потоа одреди ја нивната вистинитосна вредност.

Решение. а) $p \wedge q: 11 | 451$ и $3+1=5$, $\tau(p \wedge q) = \perp$, бидејќи исказот q е неточен, **б)** $p \wedge r: 11 | 451$ и $3 \in \mathbb{N}$, $\tau(p \wedge r) = \top$, бидејќи и двата искази се точни, **в)** $q \wedge r: 3+1=5$ и $3 \in \mathbb{N}$, $\tau(q \wedge r) = \perp$, бидејќи двата искази се неточни. ♦

Дисјункција

Нека се дадени исказите $p: 14$ е делив со 7 и $q: 14$ е делив со 2. Тогаш со помош на сврзникот „или“ може да се образува исказот 14 е делив со 7 или 14 е делив со 2. Тоа е сложен исказ кој се нарекува дисјункција на исказите p и q и се означува со $p \vee q$ (читај „p или q“).

Дефиниција. Дискунција на исказите p и q е исказот $p \vee q$ кој се добива од исказите p и q со помош на сврзникот „или“.

Дисјункцијата е точен исказ кога барем еден од исказите е точен.

Според тоа може да ја составиме следнава таблица на вредности на вистинитост за дисјункцијата:

p	q	$p \vee q$
Т	Т	Т
Т	$\perp$	Т
$\perp$	Т	Т
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Задача 4. Дадени се исказите $p: 3<3$, $q: 3=3$ и $r: 3>3$. Одреди ги дисјункциите $p \vee q, q \vee r$ и $p \vee r$, а потоа одреди ја нивната вистинитосна вредност.

Решение. $p \vee q: 3<3$ или $3=3$ т.е. $3 \leq 3$, $\tau(p \vee q)=\text{Т}$, бидејќи исказот q е точен, $q \vee r: 3=3$ или $3>3$ т.е. $3 \geq 3$, $\tau(q \vee r)=\text{Т}$, бидејќи исказот q е точен и $p \vee r: 3<3$ или $3>3$, $\tau(p \vee r)=\perp$, бидејќи и двата искази се неточни. ♦

Исклучна дисјункција

Честопати во говорот употребуваме реченици во кои доаѓа до израз исклучната смисла на сврзникот или. Тогаш се добиваат сложени реченици кај кои од двете тврдења може да биде точно само едно.

Дефиниција. Исклучна дисјункција $p \underline{\vee} q$ (читај: или p или q) е сложен исказ кој се образува од исказите p и q.

Исклучната дисјункција е точен исказ само во случајот кога едниот од исказите е точен, а другиот неточен исказ.

Според тоа, таблицата на вредности на вистинитост на исклучната дисјункција е:

p	q	$p \underline{\vee} q$
Т	Т	$\perp$
Т	$\perp$	Т
$\perp$	Т	Т
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Задача 5. Дадени се исказите $p: 2>2$ и $q: 2<2$. Образувај го исказот $p \underline{\vee} q$ и одреди ја неговата вистинитосна вредност.

Решение. $p \underline{\vee} q$:или $2>2$ или $2<2$ и $\tau(p \underline{\vee} q)=\perp$, бидејќи ниту еден од двата искази не е точен. ♦

Импликација

Да ја разгледаме условната реченица: Ако 46 е парен број, тогаш 46 е делив со 2. Забележуваме дека таа е формирана од два прости искази $p: 46$ е парен број, $q: 46$ е делив со 2 и зборовите „ако...,тогаш...“.

Дефиниција. Сложениот исказ кој се добива од исказите p и q, со помош на зборовите „ако...,тогаш...“ се вика импликација на исказите p и q и се означува со $p \Rightarrow q$ (читај: ако p, тогаш q).

Импликацијата $p \Rightarrow q$ е неточен исказ, само кога p е точен, а q неточен исказ. Во сите останати случаи импликацијата е точен исказ.

Таблицата на вредности на вистинитост за импликацијата е:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	T

Задача 6. Дадени се исказите $p: 6|18$, $q: 6|21$ и $r: 6|36$. Образувај ги импликациите:

а) $p \Rightarrow q$

б) $q \Rightarrow r$

в) $r \Rightarrow p$,

а потоа одреди ја нивната вистинитосна вредност.

Решение. а) $p \Rightarrow q$:Ако $6|18$, тогаш $6|21$, $\tau(p \Rightarrow q) = \perp$, бидејќи p е точен , а q неточен исказ, **б)** $q \Rightarrow r$:Ако $6|21$, тогаш $6|36$, $\tau(q \Rightarrow r) = \mathrm{T}$, бидејќи q е неточен, а r точен исказ, **в)** $r \Rightarrow p$:Ако $6|36$, тогаш $6|18$, $\tau(r \Rightarrow p) = \mathrm{T}$, бидејќи и двата искази се точни. ♦

Во импликацијата $p \Rightarrow q$, исказот p се вика **претпоставка** (**хипотеза** или **услов**), а исказот q се вика **заклучок** (**последица**). Притоа исказот $p \Rightarrow q$ може да го прочитаме и на некој од следниве начини:

а) од p следува q

б) p имплицира q

в) p е доволен услов за q

г) q е потребен услов за p.

Еквиваленција

Да го разгледаме исказот: $4|20$ ако и само ако $20:4=5$. Тој е сложен исказ образуван од исказите $p: 4|20$, $q: 20:4=5$ и зборовите ако и само ако.

Дефиниција. Сложениот исказ $p \Leftrightarrow q$ (читај: p ако и само ако q) се вика еквиваленција на исказите p и q.

Еквиваленцијата е точен исказ само кога и двата искази имаат иста вистинитосна вредност.

Таблицата на вредности на вистинитост за еквиваленцијата е:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T

Задача 7. Утврди кои од следниве еквиваленции се точни:

а) $p \Leftrightarrow q : -5$ е природен број ако и само ако -5 е цел број

б) $r \Leftrightarrow s : 2 < 3$ ако и само ако $-2 > -3$

Решение. а) не е точен исказ бидејќи $\tau(p) = \perp$ и $\tau(q) = \mathrm{T}$, **б)** е точен исказ бидејќи и двата искази се точни. ♦

Својства на логичките операции

1. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ комутативен закон за конјункцијата

2. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ комутативен закон за дисјункцијата

3. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ асоцијативен закон за конјункцијата

4. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ асоцијативен закон за конјункцијата

5. $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ и $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ десен и лев дистрибутивен закон за конјункцијата во однос на дисјункцијата

6. $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ и $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ десен и лев дистрибутивен закон за дисјункцијата во однос на конјункцијата

7. $\tau(p \vee \neg p) = \mathrm{T}$ закон за исклучување на третото

8. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ закон за замена на импликацијата

9. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ закон за замена на еквиваленцијата

10. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ Де Мораганов закон за негација на конјункцијата

11. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ Де Мораганов закон за негација на дисјункцијата

Задачи

1. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} \wedge \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$

б) $\neg\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}\right)$

в) $2^3 + 2^2 = 2^5 \vee 2 + 3 = 5$

г) $3 < 5 \underline{\vee} -3 > -5$

д) $28 = 7 \cdot 4 \Rightarrow 4 \mid 28$

ѓ) $(56 - 24) + 32 = 56 - (24 + 32) \Leftrightarrow 2 = 3$

2. Пресметај:

а) $\tau(4 - 2 = 6 \wedge 6 + 2 = 4)$

б) $\tau(\neg\neg(5 > 3))$

в) $\tau(3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow 3 + 4 > 5)$

г) $\tau\left(\alpha+\beta=90^\circ \Rightarrow \gamma=90^\circ\right)$, каде α,β и γ се агли во триаголник.

3. Дадени се исказите p:Секој квадрат има еднакви дијагонали, q: Дијагоналите во ромбот се заемно нормални и r: Дијагоналите во секој трапез се еднакви. Формирај ги исказите:

а) $p \Leftrightarrow r$

б) $q \vee r$

в) $r \Rightarrow p$,

а потоа одреди ја нивната вистинитосна вредност.

4. Нека $\tau(p)=\mathrm{T}, \tau(q)=\mathrm{T}$ и $\tau(r)=\perp$. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $r \Rightarrow p$

б) $q \vee p$

в) $q \Leftrightarrow r$

5. Одреди ја вредноста на $\tau(p)$ ако:

а) $\tau(\neg p)=\mathrm{T}$

б) $\tau(p \wedge q)=\perp$ и $\tau(q)=\mathrm{T}$

в) $\tau(p \vee q)=\perp$ и $\tau(q)=\mathrm{T}$

г) $\tau(p \Rightarrow q)=\perp$ и $\tau(q)=\perp$

д) $\tau(p \Leftrightarrow q)=\perp$ и $\tau(q)=\mathrm{T}$

ѓ) $\tau(p \veebar q)=\perp$ и $\tau(q)=\mathrm{T}$

1.3. Исказни формули

Сложениот исказ $(p \Rightarrow q) \vee (\neg p \Leftrightarrow r)$ содржи конечна низа од искази ($p,q,r,s,...$), некоја од логичките операции ($\neg, \wedge, \vee, \veebar, \Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$) и одреден број на загради. Ваквите искази се викаат **исказни формули**. На местото на исказите може да се најдат и сложени искази, па затоа нив ги викаме **исказни променливи**, а вистинитосните вредности Т и $\perp$ ги викаме **исказни константи**.

Дефиниција. 1) Исказните променливи $p,q,r,s,...$ и исказните константи Т и $\perp$ се викаат елементарни исказни формули.

2) Ако A и B се исказни формули, тогаш и $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \veebar B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$ се пак исказни формули.

3) Сите исказни формули се добиваат со конечна примена на 1) и 2).

Пример 1. Исказни формули се $\neg p \Leftrightarrow q$, $p \Rightarrow (\neg q)$, но $p \vee$, $\wedge \neg p$ не се исказни формули. ♦

При запишувањето на исказните формули се почитуваат неколку правила:

1) Надворешните загради не мора да се запишат

Пример 2. Формулата $((p \wedge q) \vee r)$ се запишува $(p \wedge q) \vee r$. ♦

2) Го поедноставуваме записот на формулата според приоритетот на извршување на логичките операции. Прво се извршува $\neg$, а потоа $\wedge, \vee, \underline{\vee}, \Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$.

Пример 3. Во формулата $p \Leftrightarrow \left(q \Rightarrow (\neg p \vee r)\right)$ може да ги изоставиме заградите и да запишеме $p \Leftrightarrow q \Rightarrow \neg p \vee r$, бидејќи според приоритет прво се одредува вистинитосната вредност на $\neg p$, потоа на $\neg p \vee r$, па импликацијата и на крај еквиваленцијата. ♦

Кога во една исказна формула се заменат вистинитосните вредности на исказните променливи се добиваат вистинитосните вредности на исказната формула. Притоа ако се заменат сите можни вредности на променливите, ќе се добие таблица на вредности на вистинитост на таа формула. Бројот на сите можности на променливите зависи од бројот на променливи. Ако во една исказна формула има n променливи, тогаш бројот на сите можности е еднаков на 2^n. Обично за да се означи некоја исказна формула запишуваме големи латински букви, $F, G, H, \ldots$

Пример 4. Состави таблица на вредности на вистинитост на исказната формула $F: \neg p \vee q \Leftrightarrow p \Rightarrow q$.♦

Бидејќи оваа исказна формула има две променливи, бројот на сите можности е еднаков на 4. Во табелата треба да се додаде колона за секоја логичка операција според приоритетот за нивно извршување. На тој начин се добива табелата:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q \Leftrightarrow p \Rightarrow q$
T	T	$\perp$	T	T	T
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	T	T	T	T
$\perp$	$\perp$	T	T	T	T

Видови исказни формули

Исказната формула која е точна за сите можности на исказните променливи се нарекува т**автологија**. Исказната формула која е неточна за сите можности на исказните променливи се вика **контрадикција**. Исказната формула која за едни вредности на исказните променливи е точна, а за други неточна се вика **неутрална**.

Задача 1. Одреди го видот на исказната формула:

а) $F: p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow q$

б) $G: (p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

Решение. а)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)$	$p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow q$
T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T
T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	T	$\perp$	T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T	T	T	$\perp$	T

Оваа исказна формула е тавтологија.

б)

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$	G
T	T	⊥	T	T	T	T	T
T	⊥	T	⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	T	⊥	T	T	T	⊥	⊥
⊥	⊥	T	T	⊥	⊥	T	⊥

Оваа исказна формула е неутрална. ♦

Задачи

1. Одреди го видот на исказната формула

а) $F: \neg p \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$

б) $G: p \vee \neg q \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow q)$

2. Докажи дека се тавтологии формулите:

а) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

б) $p \Rightarrow \neg q \vee p$

3. Докажи дека се контадикции формулите:

а) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

б) $p \vee \neg p \Rightarrow q \wedge \neg q$

4. Испитај дали се тавтологии формулите:

а) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

б) $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

5. Испитај дали се неутрални формулите:

а) $p \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$

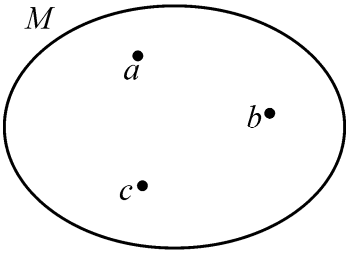
б) $\neg (p \wedge \neg q) \Rightarrow p$

1.4 Поим за множество

Поимот **множество** е основен поим во математиката. Него го осмислуваме само преку примери. Велиме множество образуваат сите ученици од еден клас, сите книги од училишната библиотека, сите точки од некоја права. Според тоа секое множество се состои од одредени различни објекти обединети според некое **заедничко карактеристично својство**. Тие објекти се викаат **елементи** на множеството.

Множествата обично се означуваат со големи латински букви $A, B, C, ..., I, J, ...$,а елементите на множеството со малите латински букви $a, b, c, ..., i, j, ...$.

Пример 1. Ако некое множество се состои само од елементите a, b и c, тогаш пишуваме $M = \{a, b, c\}$ или графички (Цртеж 1) со Венов дијаграм. ♦



Цртеж 1

Записот $a \in M$ означува дела елементот a **му припаѓа** на множеството M, а записот $4 \notin \{1,2,3\}$ означува дека 4 **не му припаѓа** на множеството $\{1,2,3\}$.

Едно множество е зададено ако се наведени сите негови елементи (велиме дека е запишано на **табеларен начин** или табеларно) или е наведено карактеристичното својство на неговите елементи (велиме дека е запишано на **описен начин** или описно).

Пример 2. Множеството $A=\{2,4,6,8\}$ е запишано на табеларен начин, а множеството $B=\{b \mid b=2n, n\in \mathbb{N}\}$ е запишано на описен начин. ♦

Задача 1. Запиши го на табеларен начин множеството

$$M=\{x \mid x\in \mathbb{N}, 2<x\le 7\}.$$

Решение. $M=\{3,4,5,6,7\}$. ♦

За две множества M и N велиме дека се **еднакви** $M=N$, ако и само ако тие се состојат од исти елементи.

Пример 3. Важи $\{a,b,c\}=\{b,c,a\}=\{b,c,c,a\}$ бидејќи не е важен редоследот на елементите во едно множество. Последното множество не се користи затоа што едно од барањата за поимот множество се однесува на различни елементи со карактеристично својство. ♦

Својства на еднаквост на множества:

-рефлексивност $A=A$

-симетричност $A=B \Rightarrow B=A$

-транзитивност $A=B \wedge B=C \Rightarrow A=C$

Задача 2. Дали се еднакви множествата:

а) $\{1,\{2,3\}\}$ и $\{1,2,3\}$

б) $\{a,b,a,c,c\}$ и $\{a,a,b,b,b,c\}$?

Решение. **а)** Не, бидејќи елементи на првото множество се 1 и $\{2,3\}$, а елементи на второто множество се $1,2$ и 3, **б)** да, бидејќи имаат исти елементи. ♦

Подмножество

Да ги разгледаме множествата $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ и $C=\{1,2,3,4,5\}$. Забележуваме дека секој елемент од множеството A е елемент и на множеството B и на множеството C и секој елемент од множеството B е елемент на множеството C. Значи множеството A е содржано во множествата

B и C, а множеството B е содржано во множеството C и пишуваме $A \subseteq B, A \subseteq C$ и $B \subseteq C$.

Дефиниција. Едно множество A е **подмножество** од множеството B ако и само ако секој елемент од A е елемент и на B т.е.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Ако за две множества важи $M \subseteq N$ и $N \subseteq M$, тогаш велиме дека $M = N$.

Дефиниција. Множеството A е **вистинско подмножество** на B, ако секој елемент од A е елемент и на B и постои барем еден елемент во B што не е елемент на A т.е. $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$.

Пример 4. Нека $M = \{a,b,c\}$, $N = \{a,b,c,d\}$. Тогаш $M \subset N$. ♦

Да ги разгледаме множествата од сите луѓе кои се повисоки од три метри или сите природни броеви помали од нула. Ова се примери на множества кои немаат елементи и се еднакви меѓу себе, па според тоа постои едно множество со таа особина. Множеството кое не содржи елементи го нарекуваме **празно множество** и го означуваме со $\varnothing$.

Празното множество е подмножество од секое множество и вистинско подмножество од секое непразно множество.

Честопати треба да се разгледаат сите подмножества од дадено множество. Множеството кое ги содржи сите подмножества од дадено множество M се вика **партитивно множество** на M и се означува со $\mathcal{P}(M)$ т.е.

$$\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subseteq M\}.$$

Пример 5. Партитивно множество на $A = \{1,2\}$ е множеството

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, A\}. \ ♦$$

Задачи.

1. Нека $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,15,18\}$. Запиши ги множествата $B = \{b \mid b \in A \wedge 3 \mid b\}$, $C = \{c \mid c \in A \wedge 2 \mid c\}$. Дали $B = C$?

2. Кои од следниве искази се вистинити?

а) $3 \in \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 3\}$

б) $\{\{a,b\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{a,b,c\})$

в) $22 \in A$, каде A е множеството од сите парни броеви од втората десетка.

3. Нека $M = \{a \mid a \in \mathbb{N} \wedge 5 < a \leq 55\}$. Одреди го множеството B кое се содржи од сите броеви кои се деливи со 5 и имаат збир на цифри парен број.

4. Одреди го множеството од сите природни броеви помали од 30 кои може да се запишат како збир од два полни квадрати.

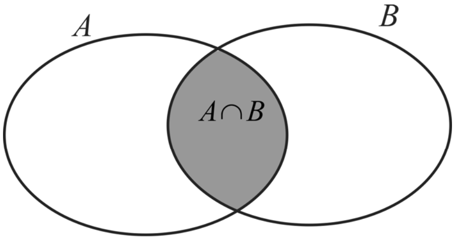
5. Каква разлика постои меѓу записите $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$?

1.5. Операции со множества

Ќе разгледаме неколку операции со множества.

Дефиниција. Пресек на две множества A и B е множеството $A \cap B$ (Цртеж 1) кое се состои од сите заеднички елементи на множествата A и B т.е.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$



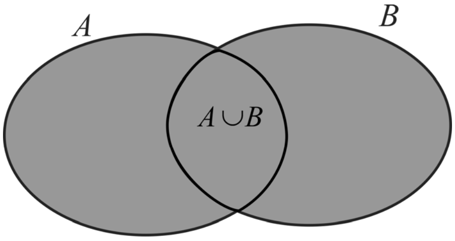
Цртеж 1

Пример 1. Нека $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ и $B = \{4, 8, 12\}$ се дадени множества. Тогаш $A \cap B = \{4, 8\}$. ♦

Пример 2. Нека $M = \{a, b, c\}$ и $N = \{1, 2, 3\}$. Тогаш $M \cap N = \varnothing$. Во ваков случај велиме дека множествата M и N се **дисјунктни**. ♦

Дефиниција. Унија на две множества A и B е множеството $A \cup B$ (Цртеж 2) кое се состои од сите елементи кои му припаѓаат барем на едно од множествата т.е.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$



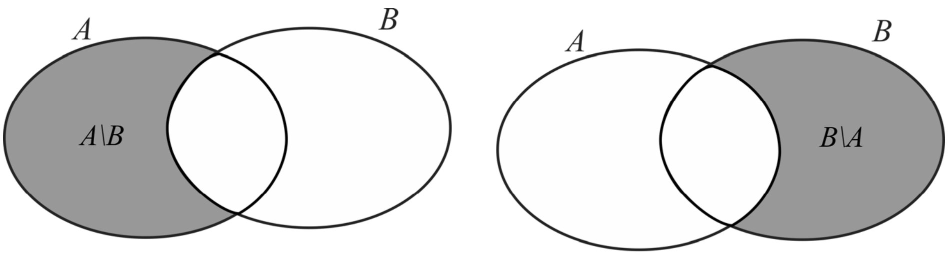
Цртеж 2

Пример 3. Нека $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Тогаш

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}. ♦$$

Дефиниција. Разлика на едно множество A со множество B е множеството $A \setminus B$ (Цртеж 3) кое се состои од сите елементи кои припаѓаат на множеството A, но не припаѓаат на множеството B т.е.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

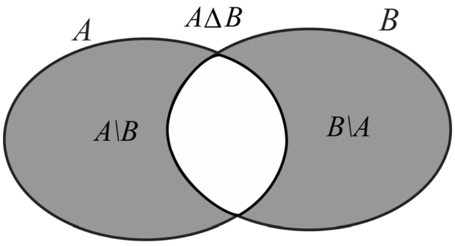


Цртеж 3

Пример 4. Нека $A=\{1,2,3,5,8\}$ и $B=\{2,4,6,8\}$. Тогаш $A\setminus B=\{1,3,5\}$. ♦

Дефиниција. Симетрична разлика на две множества A и B е множеството $A\Delta B$ (Цртеж 4) кое се состои од елементи што му припаѓаат или на множеството A или на множеството B т.е.

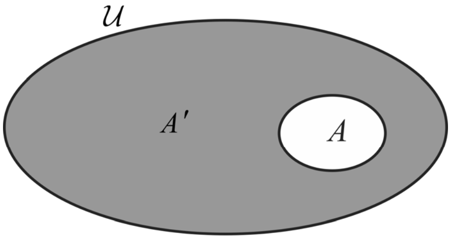
$$A\Delta B=\{x\mid x\in A\setminus B\vee x\in B\setminus A\}=\{x\mid x\in A\underline{\vee} x\in B\}.$$



Цртеж 4

Пример 5. Нека $A=\{2,3,5,7,9\}$ и $B=\{1,3,5,7,9\}$. Тогаш $A\Delta B=\{2,1\}$. ♦

Нека множеството A е вистинско подмножество од множеството M. Тогаш множеството $M\setminus A$ се состои од сите елементи кои припаѓаат на множеството M, а не припаѓаат на множеството A. Тоа множество го надополнува множеството A во однос на множеството M, па затоа се вика **комплемент** на A и се означува со A_M^C или A'_M т.е. $A'_M=\{x\mid x\in M\wedge x\notin A\}$. Множеството M во однос на кое одредуваме комплемент обично се зема фиксно и се вика **универзално множество** $\mathcal{U}$, па според тоа може да се користи ознаката $A'=\{x\mid x\in \mathcal{U}\wedge x\notin A\}$ (Цртеж 5).



Цртеж 5

Пример 6. Нека $A=\{1,3,5\}$ и $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Тогаш $A'_M=\{2,4,6,7,8,9,10\}$. ♦

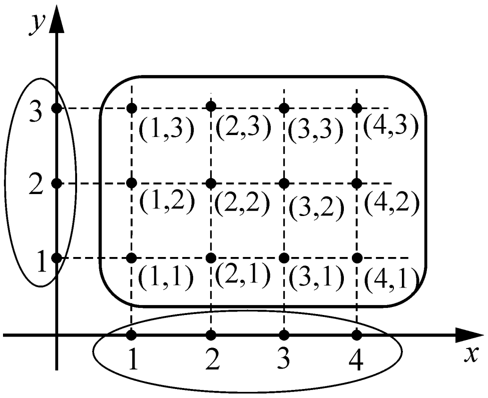
Дефиниција. Декартов (директен) производ на множествата A и B е множеството $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A\wedge b\in B\}$.

Ако едно од множествата A и B е празно, тогаш и $A\times B$ е празно множество. Забележуваме дека ако $A\neq B$, тогаш $A\times B\neq B\times A$. Множеството $A\times A=A^2$ се вика **Декартов квадрат** на множеството A т.е.

$$A^2=\{(a,b)\,|\,a\in A\wedge b\in A\}.$$

Пример 7. Нека $A=\{1,2,3,4\}$ и $B=\{1,2,3\}$. Тогаш

$$A\times B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),...,(4,3)\}$$, (Цртеж 6). ♦



Цртеж 6

<u>Својства на операциите со множества</u>

1. $A\cap B=B\cap A$ комутативен закон за пресекот

2. $A\cup B=B\cup A$ комутативен закон за унијата

3. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ асоцијативен закон за пресекот

4. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ асоцијативен закон за унијата

5. $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ и $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ десен и лев дистрибутивен закон на унијата во однос на пресекот

6. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ и $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ десен и лев дистрибутивен закон на пресекот во однос на унијата

7. $A\Delta B=B\Delta A$ комутативен закон за симетрична разлика

8. $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

9. $A\Delta A=\varnothing$

10. $A\cap A'_M=\varnothing$ и $A\cup A'_M=M$

11. $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$ и $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ десен и лев дистибутивен закон на Декартов производ во однос на пресекот

12. $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ и $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ десен и лев дистибутивен закон на Декартов производ во однос на унијата

13. $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$ и $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$ десен и лев дистибутивен закон на Декартов производ во однос на разликата

Задачи

1. Дадени се множествата $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4,5,6,7\}$ и $C=\{3,4,5,7,8\}$. Одреди ги множествата:

а) $A\cap B$, $B\cap C$ и $A\cap C$ **б)** $A\cup B$, $B\cup C$ и $C\cup A$

в) $A\setminus B$, $B\setminus C$ и $C\setminus A$ **г)** $A\Delta B$, $B\Delta C$ и $C\Delta A$

2. Нека $A\subset B$. Одреди ги множествата:

а) $A\cap B$ **б)** $A\cup B$ **в)** $A\setminus B$

г) $B\setminus A$ **д)** $A\Delta B$ **ѓ)** A'_B

3. Нека $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\wedge x<20\}$, $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\wedge 3\,|\,x\wedge x<20\}$. Одреди ги множествата:

а) $A\setminus B$ **б)** $A\Delta B$

4. Нека A е дадено множество. Одреди ги множествата:

а) $(A\times A)\cap A$ **б)** $A\times(A\cap A)$ **в)** $A\Delta A'$

5. Нека $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$ и $C=\{1,2,3\}$. Одреди ги множествата:

а) $A\setminus C$ **б)** $B\Delta C$ **в)** $B\cup C$ **г)** $A\times C$

1.6. Исказни функции

Во математиката многу често се користат реченици кои содржат променливи. На пример, нека x е парен број од втората десетка.

Речениците кои содржат променлива x од некое множество D и притоа се искази за секоја вредност на $x\in D$ ги нарекуваме **исказни функции** на множеството D. Обично ги означуваме со $P(x)$, а множеството D го викаме **дефинициона област**.

Пример 1. Нека $D=\{1,2,3,4,5,6\}$ и $P(x):2\,|\,x$. Тогаш $P(x)$ е исказна функција на D и $P(2)$ е точен, а $P(3)$ е неточен исказ. ♦

Нека $P_1(x)$ и $P_2(x)$ се исказни функции на D, тогаш такви се и сите исказни функции образувани со помош на логичките операции $\neg,\wedge,\vee,\veebar,\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$.

Множеството на сите $x\in D$ за кои $P(x)$ е точен исказ се нарекува **множество решенија** $M_{P(x)}$ на исказната функција.

Пример 2. Множествата решенија на исказните функции $P_1(x):x<20$ и $P_2(x):5\,|\,x$, за $D=\mathbb{N}$ се множествата $M_{P_1(x)}=\{1,2,...,19\}$ и $M_{P_2(x)}=\{5,10,15,...\}$. Значи $M_{P_1(x)\wedge P_2(x)}=\{5,10,15\}$ е множество решенија на функцијата $P_1(x)\wedge P_2(x)$.

♦

Множеството решенија на $P_1(x)\wedge P_2(x)$ е пресек од соодветните множества решенија, а на $P_1(x)\vee P_2(x)$ е унија од соодветните множества решенија на исказните функции $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Задача 1. Дадени се исказните функции $P_1(x):4\,|\,x$ и $P_2(x):x<16$ на $D=\{1,2,3,...,20\}$. Одреди ги множествата решенија на исказните функции: $\neg P_1(x)$, $P_1(x)\underline{\vee}P_2(x)$, $P_1(x)\Rightarrow P_2(x)$ и $P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)$.

Решение. $M_{\neg P_1(x)}=D\setminus M_{P_1(x)}=\{1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15,17,18,19\}$, бидејќи ги бараме сите оние вредности на $x\in D$ за кои $P_1(x)$ не е точен исказ, $M_{P_1(x)\underline{\vee}P_2(x)}=M_{P_1(x)}\Delta M_{P_2(x)}=\{1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15,16,20\}$, бидејќи ги бараме сите оние $x\in D$ за кои или $P_1(x)$ е точен или $P_2(x)$ е точен исказ, $M_{P_1(x)\Rightarrow P_2(x)}=D\setminus\{16,20\}=M_{\neg P_1(x)\vee P_2(x)}=M_{\neg P_1(x)}\cup M_{P_2(x)}=\{1,2,...,15\}$, бидејќи импликацијата $P_1(x)\Rightarrow P_2(x)$ е точен исказ само кога и $P_1(x)$ е неточен или $P_2(x)$ е точен исказ и

$$M_{P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)}=M_{(\neg P_1(x)\vee P_2(x))\wedge(\neg P_2(x)\vee P_1(x))}=$$

$$=\left(M_{\neg P_1(x)}\cup M_{P_2(x)}\right)\cap\left(M_{\neg P_2(x)}\cup M_{P_1(x)}\right)=\{4,8,12,17,18,19\}$$

бидејќи $P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)$ е точен исказ кога и двата искази имаат иста вистинитосна вредност. ♦

За одредување на множеството решенија на исказната функција $P_1(x)\Rightarrow P_2(x)$ може да се искористи и тавтологијата $p\Rightarrow q\Leftrightarrow\neg p\vee q$, а за $P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)$, тавтологијата $(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow p\Rightarrow q\wedge q\Rightarrow p$.

Задачи.

1. Нека $P_1(x):2\,|\,x$ и $P_2(x):3\,|\,x$ и $D=\{1,2,...,10\}$. Одреди ги множествата решенија на исказните функции:

а) $P_1(x)\wedge P_2(x)$

б) $P_1(x)\vee P_2(x)$

в) $\neg P_1(x)$

2. Нека $P_1(x):(x+1)(x-1)=0$, $P_2(x):x(x+3)=0$ и $D=\{a\,|\,a\in\mathbb{Z}\wedge -4\le a\le 4\}$. Одреди ги множествата решенија на исказните функции:

а) $P_1(x)\underline{\vee}P_2(x)$

б) $P_1(x)\Rightarrow P_2(x)$

в) $P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Кои од следниве реченици се искази?
а) Мислам дека $2+3=5$
б) $x+3=2+x$, $x\in\mathbb{R}$
в) $x(x+1)=2+x$
г) Бројот е делив со 2 ако завршува на 2.
2. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:
а) $9\,|\,6156$
б) 31 е прост број
в) 9 е најголем заеднички делител на 900 и 153
г) $-\frac{3}{5}>-\frac{1}{2}$
3. Одреди на што е еднакво:
а) $\tau\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}\right)$
б) $\tau(13\,|\,153)$
в) $\tau\left((-5)^2>(-2)^2\right)$
г) $\tau(0,3\cdot 0,1=0,03)$
4. Од кои прости искази е составен сложениот исказ?
а) Бројот 12 е делив со 3 и со 4
б) $\frac{2}{3}$ и $0,(3)$ се рационални броеви
в) Бројот 3 е сложен или непарен број

5. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:
а) $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1\Rightarrow\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}$
б) $\neg\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{11}{15}\right)$
в) $2^3<2^2\vee 2+3=5$
г) $2<5\underline{\vee}-3>-4$
д) $22=7\cdot 3+1\Leftrightarrow 4\,|\,22$
6. Нека $\tau(p)=\perp,\tau(q)=\mathrm{T}$ и $\tau(r)=\perp$. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:
а) $r\Leftrightarrow p$
б) $q\underline{\vee}p$
в) $q\wedge r$
7. Одреди ја вредноста на $\tau(p)$ ако:
а) $\tau(p\wedge q)=\mathrm{T}$ и $\tau(q)=\mathrm{T}$
б) $\tau(p\Rightarrow q)=\perp$ и $\tau(q)=\perp$
в) $\tau(p\Leftrightarrow q)=\mathrm{T}$ и $\tau(q)=\mathrm{T}$

8. Одреди го видот на исказната формула

а) $F: p \wedge q \Rightarrow p$

б) $G: p \wedge (\neg p \wedge q)$

9. Докажи дека се тавтологии формулите:

а) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

б) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$

10. Докажи дека е контрадикција следната исказна формула

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p .$$

11. Нека $A = \{2,4,6,8,10,12,14\}$.

Запиши ги множествата $B = \{b \mid b \in A \wedge 6 \mid b\}$, $C = \{c \mid c \in A \wedge 4 \mid c\}$. Дали $B = C$?

12. Кои од следниве искази се вистинити?

а) $9 \in \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 3\}$ **б)** $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{a,b,c\})$

в) $22 \in A$, каде A е множеството од сите парни броеви од третата десетка.

13. Нека $M = \{a \mid a \in \mathbb{N} \wedge 5 < a \leq 45\}$. Одреди го множеството B кое се содржи од сите броеви кои се деливи со 5 и имаат збир на цифри парен број.

14. Одреди го множеството од сите природни броеви помали од 10 кои може да се запишат како збир од три полни квадрати.

15. Дадени се множествата

$$A = \{1,2,3,4,5\},\ B = \{3,4,5,7,8\} \text{ и } C = \{1,2,3,4,5,9\}.$$

Одреди ги множествата:

а) $A \cap B$ **б)** $B \cup C$ **в)** $A \setminus B$ **г)** $C \Delta A$

16. Нека $A \cup B = A$. Одреди ги множествата:

а) $A \cap B$ **б)** $B \setminus A$ **в)** $A \Delta B$

17. Нека $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 10 \leq x < 20\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 3 \mid x \wedge x \leq 20\}$. Одреди ги множествата:

а) $A \setminus B$ **б)** $A \Delta B$

18. Нека A е дадено множество. Одреди ги множествата:

а) $(A \cap A) \Delta A'$ **б)** $A \times (A \cup A)$ **в)** $(A \cap A') \times A'$

19. Нека $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x(x-2) = 0\}$ и $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x(x+1) = 0\}$. Одреди го множеството $A \times B$.

20. Нека $P_1(x): (x+3)(x-1) = 0$, $P_2(x): (x+2)(x+1) = 0$ и $D = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge -4 \leq a \leq 4\}$. Одреди ги множествата решенија на исказните функции:

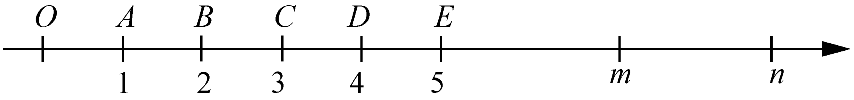
а) $P_1(x) \veebar P_2(x)$ **б)** $P_1(x) \Rightarrow P_2(x)$ **в)** $P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x)$.

2. РЕАЛНИ БРОЕВИ

2.1. Природни броеви

Множеството **природни броеви** се означува со $\mathbb{N}=\{1,2,3,...,n,n+1,...\}$. Сите природни броеви може да се запишат со помош на цифрите $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Множеството $\mathbb{N}\cup\{0\}$ го означуваме со $\mathbb{N}_0$ и се нарекува **проширено множество природни броеви** т.е. $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,...,n,n+1,...\}$.

Природните броеви може да ги претставиме графички така што прво избираме единечна отсечка $\overline{OA}=1$ (Цртеж 1). Со нанесување на OA надесно од A ги добиваме точките $B,C,D,E,...$ итн.



Цртеж 1

На овој начин може да ги претставиме природните броеви на права која се нарекува бројна оска. Притоа ако бројот m е „лево“ од бројот n, велиме дека $m<n$ или $n>m$.

Задача 1. Со помош на цртеж 1 одреди ја вистинитосната вредност на исказот:

а) $p:2<3$

б) $q:m>5$

в) $r:3\leq 4$

г) $s:5\geq 5$

Решение. а) $\tau(p)=\mathrm{T}$, бидејќи бројот 2 е „лево“ од 3, **б)** $\tau(q)=\mathrm{T}$, бидејќи m е „десно“ од 5, **в)** $\tau(r)=\mathrm{T}$, бидејќи ова е сложен исказ (дисјункција) образуван од исказите $3<4$ и $3=4$ и првиот е точен, **г)** $\tau(s)=\mathrm{T}$. ♦

Дефиниција. Ако бројот m е помал од n, тогаш m се нарекува **претходник** на n, а n се нарекува **следбеник** на m.

Секој природен број има следбеник, но не секој природен број има претходник. На пример, бројот 1 нема претходник. Секој природен број има конечно многу претходници, а бесконечно многу следбеници.

Броевите кои за еден се разликуваат од даден број се нарекуваат **непосреден следбеник** и **непосреден претходник**. На пример, од бројот 5 за еден се разликуваат броевите 4 и 6, па велиме дека 4 е непосреден претходник на бројот 5, а 6 е негов непосреден следбеник. Значи за природниот број $n>1$, непосредниот следбеник е $n+1$, непосредниот претходник е $n-1$.

Операции со природни броеви

Нека a и b се природни броеви. Природниот број $a+b$ се вика **збир** на природните броеви a и b. Броевите a и b се викаат **собироци**, а операцијата се вика **собирање**.

Нека a и b се природни броеви. Природниот број $a\cdot b$ се вика **производ** на природните броеви a и b. Броевите a и b се викаат **множители**, а операцијата се вика **множење**.

Да забележиме дека $a\cdot b=\underbrace{b+b+...+b}_{a\,\text{пати}}$ означува дека сме собрале a собироци од кои секој еднаков на b.

Нека a и b се природни броеви. Природниот број $a-b$ се вика **разлика** на природните броеви a и b. Бројот a се вика **намаленик**, бројот b се вика **намалител**, а операцијата се вика **одземање**. Притоа важи $b+(a-b)=a$.

Нека a и b се природни броеви. Природниот број $a:b$ се вика **количник** на природните броеви a и b. Бројот a се вика **деленик**, бројот b се вика **делител**, а операцијата се вика **делење**. Притоа важи $b\cdot(a:b)=a$.

Операциите собирање и множење природни броеви се **целосни операции** во множеството природни броеви бидејќи збирот (производот) на секои природни броеви е повторно природен број. Операциите одземање и делење на приордни броеви **не се целосни операции** бидејќи не секогаш разликата (количникот) на два природни броеви е природен број. На пример, броевите 2 и 4 се природни броеви, но не се природни брови $2-4$ и $2:4$.

Својства на операциите со природни броеви

За операциите со природни броеви важат следните својства (закони):

1. $a+b=b+a$ комутативен закон за собирање

2. $a\cdot b=b\cdot a$ комутативен закон за множење

3. $(a+b)+c=a+(b+c)$ асоцијативен закон за собирање

4. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ асоцијативен закон за множење

5. $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ и $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ десен и лев дистрибутивен закон за множењето во однос на собирањето

6. Ако $a-b\in\mathbb{N}$ и $b-c\in\mathbb{N}$, тогаш $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$ и $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$ десен и лев дистрибутивен закон за множењето во однос на одземањето

7. Ако $a+b,a-b,a:c,b:c\in\mathbb{N}$, тогаш $(a+b):c=a:c+b:c$ и $(a-b):c=a:c-b:c$ десен дистрибутивен закон за делењето во однос на собирањето и одземањето

Задача 2. Пресметај го збирот на природните броеви на наједноставен начин:

а) $147+33+17+503$
б) $1+2+3+...+19$
в) $23+46+57+72+44+58$

Решение. а) $147+33+17+503=(147+33)+(17+503)=180+520=700$, **б)** $1+2+3+...+19=(1+19)+(2+18)+...+(9+11)+10=9\cdot 20+10=190$, **в)** $23+46+57+72+44+58=(23+57)+(46+44)+(72+58)=80+90+130=300$. ♦

Задача 3. Запиши го табеларно множеството:
а) $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\wedge 3<x<26\}$
б) $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\wedge 2<x<8\}$,
а потоа одреди го множеството $C=\{(a,b)\,|\,a\in A, b\in B\wedge a-b=7\}$.

Решение. а) $A=\{4,5,...,25\}$, **б)** $B=\{3,4,5,6,7\}$, $C=\{(10,3),(11,4),(12,5),(13,6),(14,7)\}$. ♦

Природниот број b е **делител** на природниот број a, ако и само ако постои природен број c таков што $a=b\cdot c$. Честопати велиме и дека a е **содржател** на b или a е **делив** со b. Означуваме со $b\,|\,a$.

Пример 1. Бројот 4 е делител на 28 бидејќи $28=4\cdot 7$ и пишуваме $4\,|\,28$. Бројот 4 не е делител на 30, па пишуваме $4\nmid 30$. ♦

Бидејќи делењето е нецелосна операција во $\mathbb{N}$, како во случајот на 4 и 30, па воведуваме таканаречен **остаток од делењето**.

За сите природни броеви m и n постојат броеви p и q такви што $p,q\in\mathbb{N}_0$ и важи $m=np+q$, каде $0\leq q<n$.

Притоа m е деленик, n делител, p е количник и q е остаток од делењето.

Секој природен број при делење со 2 може да има остаток 0 или 1. Броевите кои имаат остаток 0 при делење со 2 ги викаме **парни** броеви, а броевите кои имаат остаток 1 при делење со 2 ги викаме **непарни** броеви.

Токму поради ваквите својства користиме ознака $2n$ за парен број и ознака $2n-1$ за непарен број.

Пример 2. Лесно се воочува дека секој природен број при делење со 5 може да има еден од остатоците $\{0,1,2,3,4\}$. Според тоа секој природен број може да се запише во еден од облиците $5n, 5n+1, 5n+2, 5n+3$ и $5n+4$, за $n\in\mathbb{N}_0$. ♦

Еден број е **прост** ако има точно два делители, а **сложен** ако има повеќе од два делители.

Пример 3. Бројот 11 е прост број, бидејќи негови делители се само 1 и 11 т.е. точно два такви, а бројот 10 е сложен затоа што негови делители се $1,2,5$ и 10 т.е. 4 делители. Бројот 1 не е ниту прост ниту сложен број бидејќи има само еден делител. ♦

Карактеристични својства за деливост

1. Ако $c|a$ и $c|b$, тогаш $c|(a+b)$

2. Ако $c|a$, $c|b$ и $a-b\in\mathbb{N}$, тогаш $c|(a-b)$

3. Ако $c|a$ или $c|b$, тогаш $c|(a\cdot b)$

4. Секој сложен број може да се запише (разложи) како производ од прости броеви

Пример 4. Бројот 36 разложен на множители е $36=2\cdot2\cdot3\cdot3$, а бројот $72=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3$. ♦

Сите делители на даден природен број n го формираат множеството делители D_n на тој број.

Пример 5. $D_{14}=\{1,2,7,14\}$, а $D_{121}=\{1,11,121\}$. ♦

Ако m и n се природни броеви, тогаш $D_m\cap D_n$ е множеството од заедничките делители на m и n. Најголемиот елемент во тоа множество се нарекува **најголем заеднички делител** и се означува со $НЗД(m,n)$. Притоа јасно е дека најмалиот елемент на тоа множество е бројот 1.

Ако за броевите m и n важи $D_m\cap D_n=\{1\}$ т.е. $НЗД(m,n)=1$, тогаш велиме дека m и n се **заемно прости броеви**.

Задача 4. Одреди го $НЗД(12,20)$.

Решение. $D_{12}=\{1,2,3,4,6,12\}$ и $D_{20}=\{1,2,4,5,10,20\}$, па $D_{12}\cap D_{20}=\{1,2,4\}$ и најголем во тоа множество е бројот 4 т.е. $НЗД(12,20)=4$.

Сите содржатели на даден природен број n го формираат множеството содржатели S_n на тој број. ♦

Пример 6. $S_4=\{4,8,12,16,...,4k,4(k+1),...\}$ се содржатели на бројот 4.

Ако m и n се природни броеви, тогаш $S_m\cap S_n$ е множеството од заедничките содржатели на m и n. Најмалиот елемент во тоа множество се нарекува **најмал заеднички содржател** и се означува со $НЗС(m,n)$. Притоа јасно е дека најголем елемент на тоа множество не постои.

Задача 5. Одреди го $НЗС(20,25)$.

Решение. $S_{20}=\{20,40,60,80,100,...\}$, $S_{25}=\{25,50,75,100,125,...\}$, па

$S_{20}\cap S_{25}=\{100,200,300,400,...\}$. Најмалиот елемент на ова множество е бројот 100 т.е. $НЗС(20,25)=100$. ♦

Задача 6. Во една продавница секој втор ден вршат достава на млеко, секој трети ден овошје и секој петти ден сокови. Ако денес ги доствиле сите три производи заедно, кога најбрзо можно ќе се случи да ги достават сите три производи во ист ден.

Решение. Бројот кој го бараме треба да ги содржи броевите $2,3$ и 5 т.е. $НЗС(2,3,5)=30$, па за 30 дена најрано повторно ќе се изврши достава на сите три производи во ист ден. ♦

Признаци за деливост

1. Еден број е делив со 2 ако и само ако завршува на парна цифра

2. Еден број е делив со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е број делив со 3

3. Еден број е делив со 4 ако и само ако двоцифрениот завршеток е број делив со 4 или завршува на 00

4. Еден број е делив со 5 ако и само ако завршува на 0 или 5

5. еден број е делив со 9 ако и само ако збирот на неговите цифри е број делив со 9

6. Еден број е делив со 10 ако и само ако завршува на 0

Задача 7. Која цифра треба да стои на местото на * во бројот:

а) $23*469$, за да тој е делив со 3

б) $113*$, за да тој е делив со 4?

Решение. а) Според признакот за деливост, дадениот број е делив со 3 ако збирот на неговите цифри $2+3+4+6+9+*=24+*$ е број делив со 3 ако и само ако на местото на * стои една од цифрите $0,3,6$ или 9, б) Двоцифрени броеви кои имаат цифра на десетки 3 и се содржатели на 4 се броевите 32 и 36, па според тоа на местото на * стои една од цифрите 2 или 6. ♦

Задачи

1. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) 5 е претходник на 12

б) 2 е непосреден следбеник на 3

в) 3 е делител на 21

2. Изврши ги назначените операции на наједноставен начин:

а) $234+457+146+473$

б) $13+47+28+62+91+89$

в) $1+2+...+50$

г) $2\cdot 8\cdot 5\cdot 125$

3. Одреди кои од следниве броеви е прост, а кој сложен:

а) 30273

б) 1111

в) 34543

4. Одреди $НЗД(248,126)$, а $НЗС(453,780)$

5. Во цвеќарата „Букет“ има ружи во три бои. Тие продаваат еднобојни букети такви што од првата боја сите букети содржат по 3 ружи, од втората боја сите букети содржат по 5 ружи и од третата боја сите букети содржат по 7 ружи. Познато е дека се продадени ист број на ружи од секоја боја. Одреди го тој број ако е поголем од 150 а помал од 250.

2.2. Цели броеви

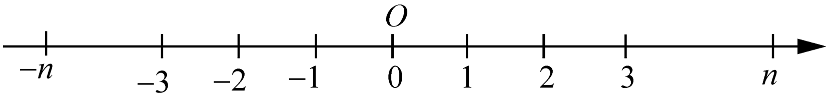
Операцијата одземање природни броеви не е целосна операција во $\mathbb{N}$ бидејќи, на пример, разликата $5-7$ не е природен број, но може да се искористи за да се опише некоја природна појава како на пример, температуратаод $5^{\circ}C$ се намали за $7^{\circ}C$. Затоа освен проширувањето на природните броеви со бројот 0 во множеството $\mathbb{N}_0$, се воведуваат и броеви кои на бројната оска се наоѓаат на исто растојание од природните броеви во однос на 0, но се на другата страна од неа.

Тие броеви ги означуваме со $\mathbb{Z}^- = \{-1,-2,-3,...\}$ и ги викаме **негативни цели броеви**. Природните броеви ги викаме позитивни цели броеви т.е. $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$.

Дефиниција. Множеството **цели броеви** се состои од позитивните цели, негативните цели и бројот 0 т.е. $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.

Бројот нула не е ниту позитивен ниту негативен цел број.

Геометриски, множеството цели броеви го претставуваме на бројната оска така што негативните цели броеви ги претставуваме како симетрични слики на природните броеви во однос на точката O (Цртеж 1).



Цртеж 1

Симетричната слика на целиот број n е бројот $-n$ и го нарекуваме **спротивен број** на бројот n.

Пример 1. Спротивен број на 2 е -2, на 1 е -1, на -5 е 5 итн. ♦

Геометриски, ако спротивните цели броеви ги споредуваме на бројната оска, јасно е дека броевите a и $-a$ се еднакво оддалечени од бројот 0. Растојанието на секој цел број a од 0 се нарекува **апсолутна вредност** на бројот a и се означува со $|a|$. Притоа

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Пример 2. $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$. ♦

<u>Правила за собирање и множење цели броеви</u>

а) Ако $a,b \in \mathbb{Z}^+$, тогаш $a+b \in \mathbb{Z}^+$ и $a \cdot b \in \mathbb{Z}^+$

б) Ако $a,b \in \mathbb{Z}^-$, тогаш $a+b \in \mathbb{Z}^-$ и $a \cdot b \in \mathbb{Z}^+$

в) Ако $a \in \mathbb{Z}^+$ и $b \in \mathbb{Z}^-$, тогаш $a+b \in \mathbb{Z}^+$ ако $|a| > |b|$, а $a+b \in \mathbb{Z}^-$ ако $|a| < |b|$ и $a \cdot b \in \mathbb{Z}^-$.

Одземањето цели броеви се дефинира со помош на собирањето односно ако $a,b \in \mathbb{Z}$, тогаш $a - b = a + (-b)$. Ова значи дека за одземање може да се користат истите правила кои се користат за собирање цели броеви.

<u>Својства на операциите со цели броеви</u>

За операциите со цели броеви важат следните својства (закони):

1. $a+b=b+a$ комутативен закон за собирање

2. $a\cdot b=b\cdot a$ комутативен закон за множење

3. $(a+b)+c=a+(b+c)$ асоцијативен закон за собирање

4. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ асоцијативен закон за множење

5. $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ и $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ десен и лев дистрибутивен закон за множењето во однос на собирањето

6. $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$ десен и лев дистрибутивен закон за множењето во однос на одземањето.

7. Ако $a:c, b:c\in\mathbb{Z}$, $c\neq 0$, тогаш $(a+b):c=a:c+b:c$ и $(a-b):c=a:c-b:c$ десен дистрибутивен закон за делењето во однос на собирањето и одземањето.

8. Збирот на два спротивни цели броеви е 0 т.е. $a+(-a)=0$.

Задача 1. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $|10|+|-10|$

б) $|13-8|+|-3|-|-5|$

Решение. а) $|10|+|-10|=10+10=20$, **б)** $|13-8|+|-3|-|-5|=5+3-5=3$.♦

При споредување на целите броеви важи истото правило како и кај природните броеви, т.е. целиот број a е помал од целиот број b ако и само ако на бројната оска бројот a се наоѓа лево од бројот b и пишуваме $a<b$.

Целите броеви може да се подредат по големина на следниов начин:

$$...<-5<-4<-3<-2<-1<0<1<2<3<4<...$$

Задача 2. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $-3>0$

б) $-7>-5$

в) $-11<-3$

Решение. а) неточно е бидејќи 0 не е лево од -3, **б)** неточно е бидејќи -7 не е десно од -5, **в)** точно е бидејќи -11 е лево од -3. ♦

Притоа важат следниве својства за подредувањето на целите броеви:

1. Ако $a<b\wedge b<c$, тогаш $a<c$

2. Ако $a<b$, тогаш $a+c<b+c$

3. Ако $a<b$ и ако $c>0$, тогаш $ac<bc$, а ако, пак, $c<0$, тогаш $ac>bc$.

Задача 3. Одреди ја вредноста на изразот $(-3+5)\cdot(-2)+|-8-11+3|$

Решение. $(-3+5)\cdot(-2)+|-8-11+3|=-4+16=12$. ♦

Ако $a,b\in\mathbb{Z}$, тогаш $a:b$ е цел број ако и само ако $b\,|\,a$.

Според тоа операциите собирање, множење и одземање цели броеви се целосни, а делењето не е целосна операција во $\mathbb{Z}$.

Задачи

1. Одреди ја апсолутната вредност на броевите:

а) -7

б) 0

в) 33

2. Пресметај ја вредност на изразот:

а) $|3-14|+|-2\cdot(-3)+1|$

б) $|7+11|+|-2\cdot(-5)+10|$

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $|-4\cdot(7-15):(8-10)+13\cdot 3-4|$

б) $|-6\cdot(9-15):(5-8)+11\cdot 4-5|$

4. Одреди кој од дадените броеви е поголем:

$A=\left(-2\cdot\left(-2\cdot(-2+3)\cdot(-2)\right)\cdot(-3)\right)$ или $B=\left(-3\cdot\left(-3\cdot(-3+5)\cdot(-2)\right)\cdot(-2)\right)$.

5. Запиши ги броевите $-2,3,-5$ и 11, нивните непосредни претходници, непосредни следбеници и спротивните броеви, а потоа пресметај го збирот на сите добиени броеви.

2.3. Рационални броеви

Постојат секојдневни ситуации кои не може да се изразат со помош на целите броеви. На пример, ако една торта треба да ја поделиме на пет луѓе веќе се јавува потреба од постоење на број со кој ќе се изрази делот од тортата што ќе го земе еден човек итн.

Заради тоа ќе сметаме дека секој запис $\frac{a}{b}$, каде $a,b\in\mathbb{Z}$ и $b\neq 0$ се вика **дропка**. Притоа две дропки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се еднакви ако и само ако $a\cdot d=b\cdot c$.

Бројот a се вика **броител**, b **именител** и „-“ се вика **дробна црта**.

Од тоа што секоја дропка како количник од броителот и именителот е нов број и секои две исти дропки даваат ист број, велиме дека множеството добиено на овој начин е $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z}\wedge b\neq 0\right\}$ и се вика **множество рационални броеви**.

Бидејќи $\mathbb{Q}^-=\left\{\frac{-a}{b}\mid a,b\in\mathbb{N}\right\}$ и $\mathbb{Q}^+=\left\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{N}\right\}$, велиме дека $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^-\cup\{0\}\cup\mathbb{Q}^+$.

Секој цел број a може да се запише како дропка $\frac{a}{1}$.

Равенствата $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ и $\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}$, за $a,b,c\in\mathbb{Z}\wedge c\neq 0$ се нарекуваат **проширување** и **скратување** на дропка.

Операции со рационални броеви

1. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ собирање и одземање рационални броеви

2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ множење рационални броеви

3. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ делење рационални броеви, каде $\frac{d}{c}$ е реципрочна вредност на $\frac{c}{d}$

Делењето дропки може да се претстави и како $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ кое се вика **двојна дропка**.

Задача 1. Пресметај ја вредноста на:

а) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$

б) $1\frac{1}{5} - 2\frac{3}{4}$

в) $\frac{3}{4} \cdot \frac{11}{13}$

г) $\frac{2}{7} : \frac{23}{14}$

Решение. а) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$,

б) $1\frac{1}{5} - 2\frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{5} - \left(2 + \frac{3}{4}\right) = -1 + \frac{1}{5} - \frac{3}{4} = -1 + \frac{4-15}{20} = -1 - \frac{11}{20} = -\left(1 + \frac{11}{20}\right) = -1\frac{11}{20}$,

в) $\frac{3}{4} \cdot \frac{11}{13} = \frac{33}{52}$, **г)** $\frac{2}{7} : \frac{23}{14} = \frac{2}{7} \cdot \frac{14}{23} = \frac{4}{23}$. ♦

Децимални броеви

Бројот од облик $a,bcd...$, каде $a \in \mathbb{Z}$ и $b,c,d,... \in \mathbb{N}$ се нарекува **децимален број**. Притоа секој децимален број се состои од два дела одделени со запирка. Делот пред запирката се вика **цел дел**, а тој после запирката се вика **децимален дел**.

Децималниот дел на еден децимален број може да биде конечен или бесконечен.

Пример 1. Бројот $3,2$ е конечен, а $1,3333...3...$ е бесконечен децимален број. ♦

Бесконечните децимални броеви кои имаат една цифра или конечна низа цифри кои се повторуваат по ист редослед после децималната запирка се нарекуваат **периодични децимални броеви**.

Пример 2. Бројот $2,6666...6...$ е периодичен децимален број и се означува со $2,(6)$, $-3,(159)=-3,159159...159...$. Слично, периодични децимални броеви се и: $5,92(356)$ и $4,1(23)$. ♦

Задача 1. Пресметај:

а) $2,35+3,9$

б) $17,2-11,36$

в) $2,7\cdot3,47$

г) $12,1:0,11$

Решение. а)
$$\begin{array}{r} 2,35 \\ +3,9 \\ \hline 6,25 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} 17,2 \\ -11,36 \\ \hline 5,84 \end{array}$$

в) Бидејќи
$$\begin{array}{r} \underline{27\cdot347} \\ 189 \\ 108 \\ +81 \\ \hline 9369 \end{array}$$

бараниот производ е $9,369$

г) $12,1:0,11=(12,1\cdot100):(0,11\cdot100)=1210:11=110$. ♦

Секоја дропка може да се запише како децимален број, со делење на броителот со именителот.

Пример 3. При делењето на броителот со именителот може да се добијат конечни децимални броеви $\frac{1}{2}=0,5$, $\frac{100}{8}=12,5$ или бесконечни децимални броеви $\frac{1}{3}=0,(3)$. ♦

Секој конечен или периодичен децимален број може да се запише како дропка.

Пример 4. Бројот $4,7$ се запишува како дропка на следниот начин:

$$4,7=\frac{4,7}{1}=\frac{4,7\cdot10}{1\cdot10}=\frac{47}{10}.$$ ♦

Пример 5. Бројот $3,(6)$ се запишува како дропка на следниот начин:

$$x=3,(6)\,/\cdot10$$
$$10x=36,(6)$$

Со одземање се добива $10x-x=36,(6)-3,(6)$ т.е. $9x=33$. Значи $x=\frac{33}{9}=\frac{11}{3}$. ♦

Пример 6. Бројот $5,32(4)$ се запишува како дропка на следниот начин:

$$x=5,32(4)/\cdot 100$$

$$100x=532,(4)/\cdot 10$$

$$1000x=5324,(4)$$

Со одземање на последните две равенства се добива $900x=4792$. Значи $x=\frac{4792}{900}=\frac{1198}{225}$. ♦

Задачи

1. Запиши ги како децимални броеви дропките: $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{25}$ и $\frac{13}{16}$.

2. Спореди ги броевите:

а) $5,(83)$ и $5,8(3)$

б) $4,(371)$ и $4,(37)$

3. Пресметај:

а) $(2,5\cdot 0,4-8,52):0,01$

б) $(12,5\cdot 0,8-1,45):0,001$

4. Запиши ги како дропки броевите:

а) $4,1(3)$

б) $2,36(21)$

5. Изврши ги назначените операции $\dfrac{\left(-0,39+\frac{72}{100}\right):0,66}{\left(\frac{5}{16}\cdot 1,2+\frac{11}{40}\right):1\frac{3}{10}}$.

2.4. Реални броеви

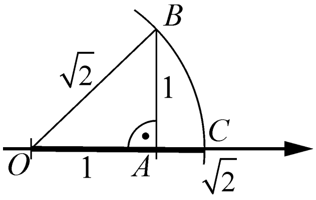
Видовме дека секој конечен и секој бесконечен периодичен број може да го запишеме како дропка т.е. тој е рационален број.

Во задачите во кои треба да се пресмета должината на хипотенузата во рамнокрак правоаголен триаголник со катета $a=1cm$ или да се одреди должината на дијагоналата на правоаголник со страни $a=1$ и $b=2$ се среќаваме со броеви кои не се рационални. Имено, во првиот случај од Питагоровата теорема се добива дека должината на хипотенузата $c=\sqrt{2a^2}$ т.е. $c=\sqrt{2}$, а во вториот случај должината на дијагоналата $d=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Во тоа тврдење лесно ќе се убедиме ако тргнеме со претпоставка дека, на пример, бројот $c=\sqrt{2}$ е рационален. Значи тој може да се претстави како нескратлива дропка т.е. $c=\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ и $НЗД(m,n)=1$. Тогаш со степенување се добива дека $m^2=2n^2$ од каде заклучуваме дека m^2 е делив со 2 т.е. m е делив со 2, па изразот $m=2k$ го заменуваме во $m^2=2n^2$ од каде се добива дека $4k^2=2n^2$

т.е. $n^2 = 2k^2$, па заклучуваме дека и n е делив со 2 што е спротивно на претпоставката дека $НЗД(m,n) = 1$.

Значи постојат броеви кои не се рационални и може да се претставaт на бројна оска, на пример, нека ΔOAB е рамнокрак правоаголен со должина на катетата $\overline{OA} = \overline{AB} = 1$. Тогаш $\overline{OB} = \sqrt{2}$ и таа должина може да се нанесе на бројната оска (Цртеж 1).



Цртеж 1

Значи постојат бесконечни и непериодични децимални броеви кои може да ги претставиме на бројна оска. Тие броеви се нарекуваат **ирационални броеви**, а множеството од сите ирационални броеви се означува со $\mathbb{I}$.

Дефиниција. Множеството рационални и множеството ирационални броеви го сочинуваат множеството **реални броеви** т.е. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Пример 1. Ирационални броеви се: $1{,}323323332....$, π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ... ♦

Секој реален број може дасе претстави на бројна оска и важи дека ако бројот a е „лево“ од бројот b, тогаш $a < b$.

Пример 2. Од претходната конструкција на бројот $\sqrt{2}$ јасно е дека $1 < \sqrt{2}$ бидејќи должината на хипотенузата е поголема од должината на катетате во секој правоаголен триаголник. ♦

Дефиниција: Нека $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$, тогаш

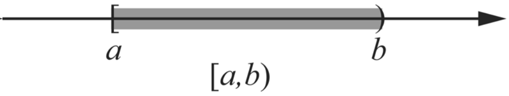
$(a,b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$ се нарекува отворен интервал,

$[a,b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\}$ се нарекува полуотворен интервал од десно,

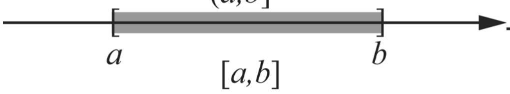
$(a,b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\}$ се нарекува полуотворен интервал од лево,

$[a,b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$ се нарекува затворен интервал.

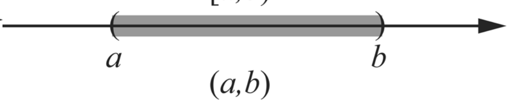
$(a,b]$



$[a,b)$



$[a,b]$



(a,b)

Дефиниција: Нека $a \in \mathbb{R}$, тогаш

$[a,\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq a\}$, $(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \leq a\}$,

$(a,\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > a\}$ и $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x < a\}$ се викаат неограничени интервали (полуправи).

Задача 1. Кои од следниве искази се вистинити?

а) $2 \in (2,5)$

б) $3\in(-7,3]$

в) $\sqrt{2}\in[1,3]$

Решение. а) неточен исказ, бидејќи $(2,5)=\{x \mid x\in\mathbb{R}\wedge 2<x<5\}$ и $2\not<2$, **б)** точен исказ бидејќи $3\le 3$, **в)** точен исказ бидејќи $\sqrt{2}>1$. ♦

Дефиниција. Апсолутна вредност од реалниот број a е:

$$|a|=\begin{cases} a, & a>0\\ 0, & a=0\\ -a, & a<0\end{cases}$$

Пример 3. Множеството $\{x \mid x\in\mathbb{R}\wedge|x|<2\}$ е отворениот интервал $(-2,2)$.

♦

Дефиниција. Нека $a\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$. Тогаш $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\,\text{пати}}$ се вика **степен** на реалниот број a.

Пример 4. Бројот $2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=(2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2)=2^2\cdot2^3$. ♦

Дефиниција. Нека $a\in\mathbb{R}$. Тогаш $\sqrt{a^2}=|a|$.

Пример 4. Вредноста на изразот $\sqrt{9}+\sqrt{16}-\sqrt{25}=|3|+|4|-|5|=2$.♦

<u>Својства на квадратен корен</u>

1. Ако $a,b\ge 0$, тогаш $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

2. Ако $a\ge 0, b>0$, тогаш $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$

3. Ако $m=2k, k\in\mathbb{N}$, тогаш $\sqrt{a^m}=\sqrt{a^{2k}}=\sqrt{\left(a^k\right)^2}=\left|a^k\right|$

4. Ако $m=2k+1, k\in\mathbb{N}$ и $a\ge 0$, тогаш $\sqrt{a^m}=\sqrt{a^{2k+1}}=\sqrt{\left(a^k\right)^2 a}=\left|a^k\right|\sqrt{a}$

5. Ако $b\ge 0$, тогаш $a\sqrt{b}\pm c\sqrt{b}=(a\pm c)\sqrt{b}$

Пример 5. Бројот $\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot2\cdot2}=\sqrt{2^2\cdot2}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}=|2|\sqrt{2}=2\sqrt{2}$, па велиме дека $\sqrt{8}$ е запишан во **нормален вид**. ♦

Задача 2. Пресметај:

а) $\sqrt{32}+\sqrt{50}$

б) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{18}+\sqrt{8}$

Решение. а) $\sqrt{32}+\sqrt{50}=\sqrt{2^2\cdot2^2\cdot2}+\sqrt{5^2\cdot2}=4\sqrt{2}+5\sqrt{2}=9\sqrt{2}$,

б) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{18}+\sqrt{8}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=-\sqrt{3}+5\sqrt{2}$. ♦

Задачи

1. Претстави ги на бројна оска броевите $-\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ и 2.

2. Одреди пресек и унија на интервалите $(-3,6]$ и $[-5,2)$.

3. Спореди ги броевите:

а) $3,4567$ и $3,4576$

б) $-3,1223$ и $-3,1224$

4. Пресметај:

а) $\sqrt{112}+\sqrt{63}$

б) $\sqrt{75}-\sqrt{12}+\sqrt{125}$

5. Какви знаци имаат a и b ако:

а) $ab<0$

б) $ab>0$ и $a+b>0$

в) $ab>0$ и $a+b<0$

г) $a:b>0$

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Дадените броеви разложи ги на прости множители:

а) 720 **б)** 3600 **в)** 837

2. Пресметај:

а) $НЗС(108,39)$ **б)** $НЗД(270,96)$

3. Пресметај:

а) $365+48+135+252+200$ **б)** $15:3+25\cdot 11\cdot 4-50\cdot 5$

4. Марко секој трет ден оди на пливање, секој четврти ден го изучува кинескиот јазик и секој четиринаесетти ден вози велосипед. Ако денес Марко ги има сите три активности, одреди за колку денови повторно ќе ги има сите три активности во ист ден.

5. Ице, Пеце и Гоце имаат чекори долги $60\,\mathrm{cm}$, $65\,\mathrm{cm}$ и $70\,\mathrm{cm}$. Тие тргнуваат истовремено, од исто место и во иста насока. Одреди на кое растојание е првата точка до која секој од нив ќе направи цел број чекори.

6.Одреди ги сите трицифрени содржатели на бројот 7 поголеми од 100, а помали од 200 кои се деливи со 5.

7. Пресметај!

а) $(1-2)\cdot 20:((-3)\cdot 4+10)$ **б)** $(4-10+3+(-5)+10):(-2)$

8. Пресметај!

а) $12\cdot(4\cdot 16-84:6)-2\cdot(180:4+3\cdot 17\cdot 5)$

б) $4\cdot(4\cdot 16-135:9)-5\cdot(524:4+3\cdot 12\cdot 4)$

в) $2\cdot(4\cdot 13-117:9)-3\cdot(256:4+4\cdot 15\cdot 5)$

г) $5\cdot(4\cdot 11-176:8)-3\cdot(339:3+3\cdot 11\cdot 5)$

9. Пресметај

а) $|-3\cdot(11-15):(8-10)+11\cdot 5-7|$

б) $|6\cdot(8-11):(2-8)-11\cdot 3-5|$

в) $|-4\cdot(4-9):(23-25)+12\cdot 4-7|$

г) $|-9\cdot(8-13):(6-9)+14\cdot 2-5|$

10. Пресметај:

а) $\dfrac{3\frac{1}{5}\cdot 7\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{5}-2\frac{7}{30}}$ **б)** $\dfrac{\frac{2}{3}}{12}+\dfrac{5}{\frac{3}{6}}-\dfrac{2+\frac{1}{3}}{3-\frac{2}{5}}$

11. Пресметај:

а) $3,72+0,02-2,35$ **б)** $(6,25:0,5)\cdot 0,01$

12. Пресметај:

а) $24:8\cdot 2-(-3)\cdot 2+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}$

б) $0,5+1,(5)-2,3(7)$

13. Запиши ги како нескратливи дропки броевите:

а) $7,3(8)$ **б)** $2,(47)$

14. На бројна оска претстави ги интервалите:

а) $[1,5]$ **б)** $[-2,3)$ **в)** $(-3,2]$

15. На бројна оска претстави ги броевите:

а) $\sqrt{5}$ **б)** $\sqrt{11}$ **в)** $2\sqrt{3}$

16. Одреди:

а) $(-2,4]\cap[0,5)$ **б)** $(-2,4]\cup[0,5)$

17. Дадени се множествата $A=\{x\mid x\in\mathbb{R},-4,7<x\leq 3,2\}$, $B=\{x\mid x\in\mathbb{R},-3,8\leq x<5,3\}$ и $C=\{x\mid x\in\mathbb{R},-2,4\leq x\leq 6,9\}$. Одреди го множеството $A\cap(B\cup C)$.

18. Пресметај:

а) $\sqrt{45}+\sqrt{75}$ **б)** $\sqrt{288}-\sqrt{8}+\sqrt{18}$

19. Нека $a=-3,7$ и $b=-11,5$. Пресметај ја вредноста на:

а) $|a+b|$ **б)** $|a-b|$ **в)** $|a|\cdot|b|$

20. Ако $\dfrac{-12}{b-a}<0$, тогаш дали важи $a>b$?

3. РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

3.1. Степен со показател природен број

Разгледувањето на збирот од еднакви собироци доведе до операцијата множење. Слично, разгледувањето на производот од еднакви множители доведува до нова операција – степенување.

Дефиниција. Производот на n еднакви множители, од кои секој од нив е еднаков на некој реален број a, се нарекува **n – ти степен на бројот a** и се означува со a^n, односно

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ пати}}$$

Бројот a се нарекува **основа на степенот**, а бројот n се вика **показател на степенот**.

Бидејќи производот треба да има барем два множители, според погорната дефиниција, степеновиот показател n не треба да биде помал од 2. Но, по договор се зема $a^1 = a$.

Степенот на било кој број се пресметува така што тој се запишува во вид на производ, а потоа се врши множењето.

Пример 1. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$;

б) $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$. ♦

Од дефиницијата за производ на броеви непоследно следува дека:

• Степенот на било кој позитивен број со парен показател е позитивен број, односно

$$a > 0 \;\; \Rightarrow \;\; a^n > 0.$$

• Степенот на негативен број со парен показател е позитивен број, додека степенот на негативен број со непарен показател е негативен број, односно

$$a < 0 \;\; \Rightarrow \;\; \begin{cases} a^n > 0, \text{ ако } n \text{ е парен број} \\ a^n < 0, \text{ ако } n \text{ е непарен број} \end{cases}$$

Операциите со степени ги вршиме согласно следниве правила:

1. Правило за множење на степени со еднакви основи

Производот на два степена со еднакви основи е степен со истата основа и со показател еднаков на збирот од показателите на множителите, односно

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (1)$$

Навистина, имаме дека $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ пати}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ пати}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n+m \text{ пати}} = a^{n+m}$.

Пример 2. а) $a^3 \cdot a^4 = a^7$; **б)** $a^n \cdot a^2 = a^{n+2}$. ♦

2. Правило за делење на степени со еднакви основи

Количникот на два степена со еднакви основи е степен со истата основа и со показател еднаков на разликата на показателот на деленикот со показателот на делителот, односно

$$a^n : a^m = a^{n-m}, \text{ при услов } m > n. \qquad (2)$$

Навистина, имаме дека производот од делителот и количникот

$$a^m \cdot a^{n-m} = a^{m+(n-m)} = a^n,$$

е еднаков на деленикот од каде што следува дека точноста на равенството (2).

Пример 3. а) $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$, бидејќи $a^3 \cdot a^2 = a^5$.

б) $a^{n+5} : a^{n-1} = a^{(n+5)-(n-1)} = a^4$. ♦

3. Правило за степенување на производ

Производ на два броја се степенува така што секој множител се степенува со степеновиот показател, па добиените степени се множат, односно

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n. \qquad (3)$$

Навистина, врз основа на дефиницијата за степен и комутативноста и асоцијативноста на множењето, имаме дека

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdots (a \cdot b)}_{n \text{ пати}} = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ пати}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdots b)}_{n \text{ пати}} = a^n \cdot b^n.$$

Пример 4. $(-2a)^5 = (-2)^5 \cdot a^5 = -32a^5$. ♦

Правилото за степенување на производ на два броја може да се прошири за случај кога производот има повеќе од два множители, односно

$$(a \cdot b \cdot c \cdots z)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdots z^n.$$

Пример 5. $(x \cdot y \cdot z)^3 = x^3 \cdot y^3 \cdot z^3$. ♦

Равенството (3) понекогаш е корисно да се чита и применува оддесно налево, односно

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n,$$

што би значело дека степени со еднакви показатели се множат, така што производот од нивните основи се степенува со заедничкиот степенов показател.

Пример 6. $24^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(24 \cdot \frac{1}{6}\right)^3 = 4^3 = 64$. ♦

4. Правило за степенување на количник

Количник на два броја се степенува така што одделно се степенуваат деленикот и делителот со степеновиот показател, и потоа степенуваниот деленик се дели со степенуваниот именител, односно

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \qquad \text{при услов } b \neq 0. \qquad (4)$$

Навистина, врз основа на дефиницијата за степен и правилото за множење на дропки, имаме дека

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ пати}} = \underbrace{\frac{a \cdot a \cdots a}{b \cdot b \cdots b}}_{n \text{ пати}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Пример 7. $\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{4^3}{5^3}=\frac{64}{125}$. ♦

Равенството (4) понекогаш е корисно да се чита и применува оддесно налево, односно

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n, \text{ при услов } b\neq 0.$$

што би значело дека степени со еднакви показатели се делат, така што количникот од нивните основи се степенува со заедничкиот степенов показател.

Пример 8. $\frac{18^5}{9^5}=\left(\frac{18}{9}\right)^5=2^5=32$. ♦

5. Правило за степенување на степен

Степен се степенува така што основата на степенот се степенува со производот на двата показатели, односно

$$(a^m)^n=a^{m\cdot n}. \qquad (5)$$

Навистина, врз основа на равенството (1), имаме дека

$$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdots a^m}_{n\text{ пати}}=a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\text{ пати}}}=a^{m\cdot n}.$$

Пример 9. $(a^3)^5=a^{3\cdot 5}=a^{15}$. ♦

Задачи

1. Пресметај

а) $(-5)^2+(-2)^3$ **б)** $3\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)^3$ **в)** $-(-1)^2+1$.

2. Изврши ги назначените операции:

а) $(-2)\cdot(-3)^2+(-5)^2-(-14)^3:7$ **б)** $-(-4)^2\cdot(-0,3)^3+8\cdot(-3)$

3. Пресметај ги вредностите на изразите:

а) $\frac{-1,75:(-0,35)+8,8:(-0,11)}{(-2,45+3,2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}$ **б)** $\left\{\left[4-3\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right]:\frac{4}{25}\right\}\cdot 5^3\cdot 2^3$

4. Изврши ги назначените операции со степени:

а) $a^2\cdot a^3\cdot a^5$ **б)** $a^n\cdot a^5$ **в)** $x^{n-1}\cdot x$

г) $a^7:a^4$ **д)** $b^{n+2}:b^3$ **ѓ)** $a^8:(a^2\cdot a^5)$.

5. Пресметај

а) $(a^2)^3$ **б)** $(a^n)^2$ **в)** $(2a\cdot b^2)^3$

г) $(-3a^2\cdot b^2\cdot c^3)^2$ **д)** $25^3\cdot 4^3$ **ѓ)** $-(-a^3)^2$

е) $(a^{2n})^3:(a^3)^{2n}$ **ж)** $\left(-\frac{5x^2}{b}\right)^3$ **з)** $\left(\frac{a^3b}{2c^3}\right)^4$

3.2. Степен со показател нула и цел негативен број

Со дефиницијата на степен со показател природен број, изразите a^0 и a^{-n}, каде што n е природен број, останаа недефинирани. За овие степени ја воведуваме следната дефиниција.

Дефиниција. (*i*) За секој реален број $a \neq 0$ степенот a^0 е еднаков на единица, односно

$$a^0 = 1$$

(*ii*) За секој реален број $a \neq 0$ и за секој природен број n, степенот a^{-n} е реципрочна вредност на степенот a^n, односно

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Пример 1. а) $7^0 = 1$; **б)** $\pi^0 = 1$; **в)** $\left(\frac{3}{8}\right)^0 = 1$;

г) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; **д)** $0{,}01^{-2} = \frac{1}{0{,}01^2} = \frac{1}{0{,}0001} = 10000$. ♦

Задача 1. Пресметај ја вредноста на изразот: $2^{-2} - 2^{-3} + 4^{-1} - (-1)^{-5} + 3^0$.

Решение. Имаме дека

$$2^{-2} - 2^{-3} + 4^{-1} - (-1)^{-5} + 3^0 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{(-1)^5} + 1 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{19}{8}. ♦$$

На тој начин вредноста на степенот a^{-n} е дефинирана за секој цел број $a \neq 0$. Да забележиме дека во погорните дефиниции степените a^0 и a^{-n}, каде n е природен број, не се дефинирани и за нив велиме дека немаат смисла.

Ќе покаже дека со усвоените дефиниции за степенување со показател нула и негативен цел број, правилата за операциите со нив се исти како за и степенување со показател природен број, односно имаме дека

За секои $a,b \in \circ\backslash\{0\}$ и за секои цели броеви $n,m \in$ важи:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; **2.** $a^n : a^m = a^{n-m}$; **3.** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; **5.** $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$.

Да го докажеме тврењето $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

- За $n \in \mathbb{N}$ тврдењето е докажано претходно.
- За $n = 0$ имаме $(a \cdot b)^0 = 1$ и $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1$, од каде што следува дека $(a \cdot b)^0 = a^0 \cdot b^0$.

- За $n=-p,\ p\in\mathbb{N}$, имаме

$$(a\cdot b)^n=(a\cdot b)^{-p}=\frac{1}{(a\cdot b)^p}=\frac{1}{a^p\cdot b^p}=\frac{1}{a^p}\cdot\frac{1}{b^p}=a^{-p}\cdot b^{-p}=a^n\cdot b^n.$$

Останатите тврдења се докажуваат аналогно.

Пример 2. а) $x^{-3}\cdot x^{-4}:x^{-6}=x^{-3+(-4)}:x^{-6}=x^{-7}:x^{-6}=x^{-7-(-6)}=x^{-1}$;

б) $(x^{-5})^{-2}=x^{(-5)\cdot(-2)}=x^{10}$; **в)** $\dfrac{(x^5)^{-3}\cdot x^7}{x^{-8}}=\dfrac{x^{-15}\cdot x^7}{x^{-8}}=\dfrac{x^{-8}}{x^{-8}}=1$. ♦

Задача 2. Изврши ги назначените операции:

а) $\dfrac{a^3\cdot a^{-4}\cdot(-2a^{-2})}{a^{-5}}$; **б)** $\left(\dfrac{b^3\cdot b^{-5}}{b^{-4}}\right)^{-1}$.

Решение. Имаме дека

а) $\dfrac{a^3\cdot a^{-4}\cdot(-2a^{-2})}{a^{-5}}=\dfrac{a^{-1}\cdot(-2a^{-2})}{a^{-5}}=-2\cdot\dfrac{a^{-3}}{a^{-5}}=-2a^{-3-(-5)}=-2a^2$;

б) $\left(\dfrac{b^3\cdot b^{-5}}{b^{-4}}\right)^{-1}=\left(\dfrac{b^{-2}}{b^{-4}}\right)^{-1}=(b^{-2-(-4)})^{-1}=(b^2)^{-1}=\dfrac{1}{b^2}$. ♦

Ако основата на степенот со показател цел негативен број е дропка, тогаш, согласно со дефиницијата, добиваме:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}$$

од каде што заклучуваме дека дропка се степенува со цел негативен показател на тој начин што нејзината реципрочна вредност се степенува со спротивниот број на дадениот показател.

Пример 3. а) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{4^2}{3^2}=\dfrac{16}{9}$; **б)** $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3}=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3=-\dfrac{3^3}{2^3}=-\dfrac{27}{8}$;

в) $(-2)^{-5}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=\dfrac{1}{(-2)^5}\cdot\left(-\dfrac{2}{1}\right)^2=\dfrac{1}{(-2)^5}\cdot(-2)^2=(-2)^{-3}=\dfrac{1}{(-2)^3}=-\dfrac{1}{8}$. ♦

Задача 3. Изврши ги назначените операции:

а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1}{12}\right)^{0}$; **б)** $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$.

Решение. Имаме дека

а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1}{12}\right)^{0}=3^1+3^2+2^1-7^1-1=6$;

б) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}=4^2+2^3=24$. ♦

Задача 4. Дадените изрази запиши ги без негативни показатели:

а) $\dfrac{a^2\cdot b^{-4}}{c^{-5}}$; **б)** $x^{-3}\cdot y^2$; **в)** $\dfrac{5x^{-1}\cdot y^{-2}\cdot z^3}{a^{-4}\cdot b^{-1}}$; **г)** $\dfrac{(2a^3+3)^0}{b^{-3}}$; **д)** $\dfrac{1}{a^{-5}b^2}$.

Решение. Имаме дека

а) $\dfrac{a^2\cdot b^{-4}}{c^{-5}}=\dfrac{a^2\cdot\dfrac{1}{b^4}}{\dfrac{1}{c^5}}=\dfrac{\dfrac{a^2}{b^4}}{\dfrac{1}{c^5}}=\dfrac{a^2\cdot c^5}{b^4}$; **б)** $x^{-3}\cdot y^2=\dfrac{1}{x^3}\cdot y^2=\dfrac{y^2}{x^3}$;

в) $\dfrac{5x^{-1}\cdot y^{-2}\cdot z^3}{a^{-4}\cdot b^{-1}}=\dfrac{5\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y^2}\cdot z^3}{\dfrac{1}{a^4}\cdot\dfrac{1}{b^1}}=\dfrac{\dfrac{5z^3}{x\cdot y^2}}{\dfrac{1}{a^4\cdot b}}=\dfrac{5z^3\cdot a^4\cdot b}{x\cdot y^2}$;

г) $\dfrac{(2a^3+3)^0}{b^{-3}}=\dfrac{1}{b^{-3}}=b^3$; **д)** $\dfrac{1}{a^{-5}b^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a^5}\cdot b^2}=\dfrac{a^5}{b^2}$. ♦

Задачи

1. Што е поголемо:

а) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^0$ или $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$ **б)** $\left(\dfrac{4}{5}\right)^0$ или $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-1}$?

2. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $8^{-3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-10}$ **б)** $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-1}:(-32)^{-1}$.

3. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) 2^{-4} **б)** -2^4 **в)** $(-2)^4$

г) $-0,5^{-2}$ **д)** $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^0$ **ѓ)** $(5-3\cdot 0,37)^{-2}$.

4. Запиши ги изразите без негативни показатели:

а) $\dfrac{3a^{-2}\cdot c^{-3}}{4x^{-1}}$ **б)** $\dfrac{2^{-2}a^2}{3^{-1}x^2y^{-4}}$ **в)** $\dfrac{5a^{-3}c^2}{4a^2c^{-1}x^{-3}}$.

5. Запиши ги следниве изрази без именители:

а) $\dfrac{x}{ay^2}$ **б)** $\dfrac{3x}{cy^{-3}}$ **в)** $\dfrac{2ax^2}{(a-b)^{-3}}$.

6. Изврши ги назначените операции:

а) $\dfrac{4}{5}a^{-2}c^{-3}x\cdot 10a^{-4}x^{-3}$ **б)** $0,5a^{-2}:(0,02a^3b^{-1})$ **в)** $\left(-\dfrac{1}{2}x^{-1}y^{-3}\right)^{-2}$.

7. Упрости ги изразите:

а) $3x^{-4}:x^{-7}+0,25^{-1}x^{-3}-x^8:x^5$ **б)** $\left(\dfrac{2}{5}x^{-3}\cdot(y^2)^{-4}\right)^{-3}$

в) $(x^{-1}-y^{-1})^{-1},\ x\neq 0,\ y\neq 0$ **г)** $(x^{-2}+y^{-2})^{-2},\ x\neq 0,\ y\neq 0.$

3.3. Рационални алгебарски изрази

Цели и дробни рационални изрази

Дефиниција. Рационален алгебарски израз е низа од конечно многу константи и променливи, сврзани со знаците на операциите собирање, одземање, множење, делење и степенување со показател цел број, со одредено математичко значење.

Пример 1. $a+b,\ \frac{m^2+5}{m-n},\ \frac{1}{p+3}$ се рационални алгебарски изрази. ♦

Алгебарскиот израз да може да се состои и само од константи, дури и само од една константа или променлива. На пример, a, 1, 7,2 се сметаат за алгебарски изрази. Алгебарските изрази што содржат само константи се викаат **бројни изрази**. Бројот што се добива, откако во алгебарскиот израз ќе се заменат соодветните вредности на променливите и се извршат означените операции во него, се вика **бројна вредност** на изразот.

Пример 2. Бројната вредност на изразот $3x-1$ за $x=1$ е $3\cdot 1-1=2$, за $x=2$ е $3\cdot 2-1=5$, итн. ♦

Да напоменеме, дека променливите во некои рационални изрази можат да ги добиваат кои било вредности, додека кај други, можат да добиваат само определени вредности. Вредностите што може да ги добиваат променливите во даден рационален израз се викаат **допуштени вредности на променливите**.

Рационални алгебарски изрази во кои не се среќава операцијата делење со променлива или делење со израз што содржи некоја променлива, се викаат **цели рационални алгебарски изрази**.

Пример 3. $2a^2b-1,\ 5x^2-3xy,\ \frac{4x}{3},\ \frac{a^2-2b}{4}$ се цели рационални алгебарски изрази. Да забележиме дека третиот и четвртиот израз содржат делење со константа. Бидејќи делењето може да се смета за множење со реципрочна вредност, третиот и четвртиот израз може да се запишат во облик $\frac{4}{3}x$ и $\frac{1}{4}(a^2-2b)$, од каде заклучуваме дека навистина станува збор за цели рационални алгебарски изрази. ♦

Рационални алгебарски изрази кои содржат делење со променлива или делење со израз што содржи променлива, се викаат **дробно рационални изрази.**

Пример 4. Изразите $\frac{2a-1}{b},\ \frac{x}{y-2},\ \frac{5a}{2b}+4c$ се дробно рационални изрази, бидејќи содржат делење со променлива или делење со израз што содржи променлива. ♦

Мономи

Дефиниција. Цел рационален алгебарски израз кој ги содржи само операциите множење и степенување со показател природен број, се вика **моном**.

Пример 4. Изразите $5x,\ -2a^2b, -0,5m,\ \frac{3}{4}ab^2,$ се мономи. ♦

Бидејќи операцијата степенување е специјален случај на операцијата множење може да се каже дека моном е цел рационален израз кој ја содржи само операцијата множење.

Според дефиницијата за моном, секој израз што се состои само од една константа или променлива е моном, бидејќи мономот не е неопходно да ја содржи операцијата множење.

Пример 5. а) Изразите $x,\ -2, -m, 0,5$ се мономи.

б) Изразот $\frac{4ab^2}{5}$ е исто така е моном, покрај тоа што содржи делење со бројот 5. Овој израз може да се запише во облик

$$\frac{4ab^2}{5}=\frac{4}{5}ab^2=0,8ab^2.♦$$

Ако мономот содржи неколку мнножители – константи, со примена на комутативниот и асоцијативниот закон на множењето, нивниот производ може да се стави пред производот на променливите.

Пример 6. Мономот $\frac{-2ab^2\cdot 3x^2y}{5}$ го запишуваме во облик $-\frac{6}{5}ab^2\cdot 3x^2y.$ ♦

Константа што стои пред променливите се вика **коефициент на мономот**, а производот на променливите се вика **главна вредност на мономот**.

Пример 7. Во мономите $a^2b,\ -3x,\ \frac{4}{5}ab^2c$ и $-0,5m$ коефициенти се $1,\ -3,$ $\frac{4}{5}$ и $-0,5,$ а главни вредности се $a^2b,\ x,\ ab^2c$ и $m.$ ♦

Мономите кои имаат еднакви главни вредности, а се разликуваат само по своите коефициенти се викаат **слични мономи**.

Два слични мономи чии коефициенти се спротивни броеви се викаат уште и **спротивни мономи**.

Пример 8. а) Мономите $-2a^2b,\ 5a^2b,\ \frac{3}{4}a^2b$ и $-a^2b,$ се слични мономи.

б) Мономите $7a^2b$ и $-7a^2b$ се спротивни мономи. ♦

Збирот на показателите на аргументите што се јавуваат во даден моном, се вика **степен на мономот.**

Пример 9. Степенот на мономот $7x^2y$ е 3, додека степенот на мономот $3xy^3$ е 4. ♦

Полиноми

Дефиниција. Алгебарски збир од конечен број на мономи, се вика **полином.**

Пример 10. Изразите $3a-2ax+a^2b^2-bx$ и $4ax-3by+x^2y^2$ се полиноми. ♦

Мономите од кои е составен полиномот се викаат **членови на полиномот**. Полином што содржи точно два члена се вика уште и **бином**, а полином што содржи точно три членови се вика **трином**, итн.

Пример 11. а) Изразите $a+2b$ и x^2+5y се биноми.

б) Изразите $3a^2+2a+1$ и $x^2-2xy+3y$ се триноми. ♦

Секој моном може да се смета и како полином само со еден член. Од друга страна секој полином може да содржи една или неколку променливи.

Пример 12. Полиномот $5a^2-2a^3+3a^4-a+4$ содржи само една променлива во различни степени. Со примена на комутативниот закон, неговите членови може да се подредат по намалувачките степени на променливата

$$3a^4-2a^3+5a^2-a+4,$$

или по растечки степени на променливата

$$4-a+5a^2-2a^3+3a^4.\ ♦$$

Констанитите што фигурираат во полиномот се викаат **коефициенти на полиномот**. Степенот на членот со највисок степен се вика **степен на полиномот.**

Пример 13. Во полиномот $3x^3-4x^2+5$, броевите 3, –4 и 5 се коефициенти, а неговиот степен е 3. ♦

Идентични рационални изрази

Рационални изрази што имаат исто множество на допуштени вредности и имаат еднакви бројни вредности за сите допуштени вредности на променливите се викаат **идентични рационални изрази**.

Пример 14. Изразите $3(a-4)+7$ и $3a-5$ имаат еднакви бројни вредности за кои било вредности на a. Затоа тие се идентични рационални изрази.

Изразите $\frac{a^2-4}{a+2}$ и $a-2$ не се идентични, бидејќи нивните множества на допуштени вредности за променливите не се еднакви. Но, изразите и $\frac{a^2-4}{a+2}$ и $a-2$, за $a\neq 2$, се идентични, бидејќи за секое $a\neq 2$, имаат исти бројни вредности. ♦

Два идентични израза сврзани со знакот еднакво $(=)$, образуваат равенство кое се нарекува **идентитет**. Со други зборови идентитетот е равенство кое важи за сите допуштени вредности на променливите што влегуваат во него.

Пример 15. Наједноставни идентитети се равенствата со кои ги изразуваме основните закони на собирањето и множењето:

$$a+b=b+a; \qquad (a+b)+c=a+(b+c);$$

$$ab=ba; \qquad (ab)c=a(bc); \qquad (a+b)c=ac+bc.\ ♦$$

Заменувањето на еден рационален израз со друг идентичен израз на него се нарекува **идентична трансформација**. Така, на пример, подредувањето на полиномот, според степените на една од променливите претставува идентична трансформација на полиномот.

Пример 16. Нека е даден полиномот

$$5a^2+2a+4a^3+a-3a^2-4a+9.$$

Тој има седум членови, но меѓу нив има и слични. Со примена на комутативниот и асоцијативниот закон на собирањето, ги разместиме и групираме сличните мономи, при што добиваме $4a^3+(5a^2-3a^2)+(2a+a-4a)+9$. Групираните изарази во заградите можат да се упростат со примена на дистрибутивниот закон $4a^3+(5-3)a^2+(2+1-4)a+9$, така што конечно го добиваме полиномот

$$4a^3+2a^2-a+9$$

кој е идентичен на дадениот полином. ♦

Заменувањетио на алгебарскиот збир од неколку слични членови во даден полином со еден идентичен на нив член, се нарекува **сведување на сличните членови на полиномот**.

Пример 17. Имаме дека

$$\begin{aligned}3a^2+2ab-b^2-5a^2+4b^2&=(3a^2-5a^2)+2ab+(-b^2+4b^2)=\\&=(3-5)a^2+2ab+(-1+4)b^2=\\&=-2a^2+2ab+3b^2.\end{aligned}$$ ♦

Задачи

1. Кои вредности на променливите не се допуштени во следните изрази:

а) $\frac{a+5}{a-3}$ **б)** $\frac{x^2+2x-1}{x+2}$ **в)** $\frac{2ab}{a-b}$.

2. Кои се коефициентите на мономите:

а) $-4a^2b$ **б)** $2,5a$ **в)** $-cx^2$ **г)** $-\frac{x}{3}$ **д)** $\frac{2xy^2}{5}$?

3. Кои од следниве мономи се слични:

$$-3ab,\ \frac{1}{2}a^2x,\ ab,\ -a^2x,\ 6a^2x,\ -7ax^2,\ ax^2\,?$$

4. Напиши ги спротивните на следниве мономи:

$$-6ab,\ a^2b^2,\ -2ax,\ \frac{x}{3},\ -x^2y,\ 0,5a.$$

5. Одреди го степенот на полиномот $x^3y-x^2y^2+2xy-3xy^2$.

6. Дали следните изрази се идентитети:

а) $a+b=a-(-b)$ **б)** $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ **в)** $x^3+1=(x+1)(x^2+x+1)$.

7. Сведи ги членовите на полиномот:

а) $3ab-4a^2b^2-7ab^2+2ab^2-ab+4^2b^2$ **б)** $1,5a-2b+0,5b-0,3a-ab$.

3.4. Собирање и одземање на цели рационални изрази

Собирање на полиноми

Пример 1. Да ги собереме мономите:

$$7a^2,\ -5a,\ -3ab,\ 2a \text{ и } -ab.$$

Бараниот збир на дадените мономи е алгебарскиот збир:

$$7a^2+(-5a)+(-3ab)+2a+(-ab)$$

во кој, ако ги испуштиме знаците за собирање и заградите ќе добиеме

$$7a^2-5a-3ab+2a-ab.$$

Добиениот полином има слични членови, па по нивното сведување го добиваме полиномот:

$$7a^2-3a-4ab.\ \blacklozenge$$

1. (Правило за собирање на мономи) За да се соберат неколку мономи, доволно е тие да се запишат во вид на алгебарски збир, еден по друг со истите знаци што ги имаат. Потоа по потреба во добиениот полином може да се врши сведување.

Пример 2. Да ги собереме полиномите:

$$5a^2b-3a+2b \text{ и } 2a-3a^2b+4ab-7.$$

Го запишуваме бараниот збир

$$(5a^2b-3a+2b)+(2a-3a^2b+4ab-7).$$

На полиномите може да гледаме како на алгебарски збирови од броеви, па затоа при нивното собирање може да се примени правилото за додавање на алгебарски збир. Според тоа правило, кон првиот полином последователно го додаваме секој член од вториот полином

$$(5a^2b-3a+2b)+(2a-3a^2b+4ab-7)=5a^2b-3a+2b+2a-3a^2b+4ab-7.$$

Забележуваме дека бараниот збир пак е полином, во кој се вклучени сите членови на дадените полиноми со своите знаци. Добиениот полином има слични членови. По нивното сведување, добиваме:

$$5a^2b-3a+2b+2a-3a^2b+4ab-7=2a^2b-a+2b+4ab-7.\ \blacklozenge$$

2. (**Правило за собирање на полиноми)** Два полинома се собираат така што кон првиот полином последователно се допишуваат сите членови од вториот полином со истите знаци што ги имаат. Потоа по потреба, во добиениот нов полином може да се врши сведување.

Одземање на полиноми

Пример 3. Да го одземеме мономот $4a^2$ од мономот $5ab.$
Ја запишуваме бараната разлика во облик

$$5ab-(+4a^2)=5ab+(-4a^2).$$

Потоа, согласно правилото за собирање, добиваме

$$5ab+(-4a^2)=5ab-4a^2.\ \blacklozenge$$

3. (**Правило за одземање на моном од моном)** За да одезмеме еден моном од друг моном, доволно е кон намаленикот да го допишеме спротивниот моном на намалителот.

Пример 4. Имаме дека

$$3ax-(-2by)=3ax+2by. \ ♦$$

Пример 5. Да ја одредиме разликата

$$(6ax-5a+2x)-(+3x^2-4ax+2a-7).$$

Одземањето на полином го вршиме исто како и одземањето моном од моном, односно кога кон намаленмикот го допишуваме секој член од полиномот – намалител со спротивен знак. Значи, имаме дека

$$(6ax-5a+2x)-(+3x^2-4ax+2a-7)=6ax-5a+2x-3x^2+4ax-2a+7=$$
$$=10ax-7a-3x^2+2x+7. \ ♦$$

4. (Правило за одземање на полином од полином) Полиноми се одземаат така што кон полиномот-намаленик се допишуваат последователно сите членови на полиномот намалител со спротивни знаци. Потоа, по потреба во така добиениот нов полином може да се врши нивно сведување.

Ослободување од загради и затворање на загради

При собирањето и одземањето на мономи и полиноми прво ги ставаме нив во загради, а по тоа се ослободуваме од заградите. Врз основа на правилата за собирање и одземање на полиноми, можат да се извлечат следните правила за ослободување од загради.

5. (Правило за ослободување од загради) Ако пред заградата стои знакот плус $(+)$, заградата може да се избрише, а знаците пред членовите во заградата остануваат непроменети. Ако пак пред заградата стои знакот минус $(-)$, знакот и заградата можат да се избришат, но сите членови во неа треба да се препишат со спротивни знаци.

Пример 6. Имаме дека

$$3a-(2b-5c)+(-5a+4b-c)-(-7a+b-8)=$$
$$=3a-2b+5c-5a+4b-c+7a-b+8=$$
$$=5a+b+4c+8. \ ♦$$

Понекогаш станува потребно даден полином или дел од него да се затвори во заграда, а пред неа да стои знакот плус $(+)$ или минус $(-)$. Тоа го вршиме согласно следното правило.

6. (Правило за затворање на загради) Ако пред заградата во која затвораме даден полином го ставиме знакот плус $(+)$, тогаш сите членови на затворениот полином ги задржуваат своите знаци.

Пример 7. Имаме дека

$$3a-b+5c=+(3a-b+5c). \ ♦$$

7. (Правило за затворање на загради) Ако пред заградата во која затвораме даден полином го ставиме знакот минус $(-)$, тогаш сите членови на затворениот полином ги менуваат своите знаци во спротивни.

Пример 8. Имаме дека

$$3a-b+5c=-(-3a+b-5c). \ ♦$$

Задачи

1. Собери ги мономите:

а) $7x^4,\ -5x^2,\ -4x^3,\ 6x^2$ и $12x^4$ **б)** $-2xy,\ 7xy,\ 5xy$ и $-3xy$.

2. Изврши го собирањето на полиномите:

а) $(5x^2-ax+a^2)+(3x^2+2ax-a^2)+(4ax-3x^2+8)$

б) $(2a^4+3a^3b-2a^2b^2-ab^3)+(a^4-a^3b+3a^2b^2+4ab^3-b^4)$.

3. Изврши го означеното одземање на мономите:

а) $-5a-(+3a)$ **б)** $3x-(-2x)$ **в)** $2ab-(+2ab)$ **г)** $3ax-(-ax^2)$.

4. Изврши го одземањето на полиномите:

а) $(6a^2x-2ax^2+5)-(4a^2x+ax^2-3)$

б) $(x^3y-2xy^2+3xy-2)-(-4x^3y+xy-3xy^2+5x^2y+1)$.

5. Ослободи се од заградите и упрости го изразот:

а) $(2x^2+3y^2)-\{(x^2-2xy-y^2)+[(3x^2+2xy-(-5xy+2y^2)]\}$

б) $3x^2y-\{xyz-(3xyz-x^2z)+[2x^2y-(5x^2y-4xyz-x^2z)]\}$.

3.5. Множење на цели рационални изрази

Множење на мономи

Пример 1. Да го пресметаме производот на мономите $-5ab^2c$ и $3a^3bx$.

Бидејќи и самите мономи претставуваат производи, со примена на комутативниот и асоцијативниот зако на множењето, горниот производ може да се запише во облик

$$-5ab^2c\cdot 3a^3bx=(-5\cdot 3)\cdot(a\cdot a^3)\cdot(b^2\cdot b)\cdot c\cdot x.$$

Откако ќе извршиме множење во секоја заграда, добиваме

$$-5ab^2c\cdot 3a^3bx=-15a^4b^3cx. \ \blacklozenge$$

Слично постапуваме и кога треба да помножиме повеќе од два монома.

Пример 2. Да го најдеме производот на мономите $4a^2b,\ 0,5ac^3$ и $-3b^3c^2$. Имаме дека

$$4a^2b\cdot 0,5ac^3\cdot(-3b^3c^2)=[4\cdot 0,5\cdot(-3)]\cdot(a^2a)\cdot(b\cdot b^3)\cdot(c^3\cdot c^2)=-6a^3b^4c^5. \ \blacklozenge$$

1. (Правило за множење на мономи) Мономи се множат така што прво се множат нивните коефициенти, а потоа и сите степени на нивните главни вредности што имаат иста основа. Степените што се среќаваат само во еден моном се пренесуваат во производот со истите показатели.

2. (Правило за степенување на моном) Моном се степенува така што се степенува секој негов множител со степеновиот показател, па потоа добиените степени се множат.

Пример 3. Имаме дека $(3a^2xy^3)^4=81a^8x^4y^{12}$. ♦

Множење на полином со моном

Пример 4. Да го пресметаме производот на полиномот $2a^3-3ab^2+5bc^2$ со мономот $4a^2b$.

Според дистрибутивниот закон на множењето, производот може да се запише во облик

$$(2a^3-3ab^2+5bc^2)\cdot(4a^2b)=2a^3\cdot4a^2b-3ab^2\cdot4a^2b+5bc^2\cdot4a^2b.$$

Откако ќе се изврши назначеното множење на мономите, се добива

$$(2a^3-3ab^2+5bc^2)\cdot(4a^2b)=8a^5b-12a^3b^3+20a^2b^2c^2.\ \blacklozenge$$

3. (Правило за множење на полином со моном) Полином се множи со мономи така што прво секој член од полиномот се множи со мономот, потоа добиените производи се собираат.

Пример 5. Имаме дека

$$(-5ax^2+4xy^3-2y+1)\cdot(-3a^2xy)=15a^3x^3y-12a^2x^2y^4+6a^2xy^2-3a^2xy.\blacklozenge$$

Множење на полиноми

Пример 6. Да го пресметаме производот на полиномите $2x^2-5xy+y^2$ и $4x+3y$.

Ако првиот полином го означиме со M, односно ако $M=2x^2-5xy+y^2$, тогаш горниот производ ќе добие облик $M\cdot(4x+3y)$.

Според правилото за множење на полином со моном, добиваме

$$M\cdot(4x+3y)=M\cdot4x+M\cdot3y.$$

Ако сега ја вратиме смената за M добиваме

$$(2x^2-5xy+y^2)\cdot(4x+3y)=(2x^2-5xy+y^2)\cdot4x+(2x^2-5xy+y^2)\cdot3y.$$

Забележуваме дека, првиот полином треба да се помножи поодделно со секој член од вториот полином. Така добиваме дека

$$\begin{aligned}(2x^2-5xy+y^2)\cdot(4x+3y)&=8x^3-20x^2y+4xy^2+6x^2y-15xy^2+3y^3=\\&=8x^3-14x^2y-11xy^2+3y^3.\blacklozenge\end{aligned}$$

4. (Правило за множење на полином со полином) Два полиноми се множат така што секој член од едниот полином се множи со секој член од другиот полином, па потоа добиените производи се собираат. На крај, по потреба, во добиениот полином може да се изврши сведување.

Пример 7. Имаме дека

$$\begin{aligned}&(2a^3-a^2b+3ab^2-5b^3)\cdot(a^2-3ab+2b^2)=\\&=2a^5-a^4b+3a^3b^2-5a^2b^3-6a^4b+3a^3b^2-9a^2b^3+\\&+15ab^4+4a^3b^2-2a^2b^3+6ab^4-10b^5=\\&=2a^5-7a^4b+10a^3b^2-16a^2b^3+21a^4b-10b^5.\ \blacklozenge\end{aligned}$$

Формули за скратено множење

Во продолжение ќе се запознаеме со пет идентитети познати како формули за скратено множење. Да напоменеме дека A и B ќе ни означуваат не само броеви, туку и кои било изрази.

1. Квадрат на збир од два израза

Квадрат на збир од два израза е еднаков на квадратот од првиот израз плус удвоениот производ на првиот и вториот израз и плус квадратот на вториот израз, односно

$$\boxed{(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$$

Навистина, имаме дека

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Пример 8. Имаме дека

$$(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2. \ ♦$$

$$76^2 = (70+6)^2 = 70^2 + 2\cdot 70\cdot 6 + 6^2 = 4900 + 840 + 36 = 5776.$$

2. Квадрат на разлика од два израза

Квадрат на разлика од два израза е еднаков на квадратот од првиот израз минус удвоениот производ на првиот и вториот израз и плус квадратот на вториот израз, односно

$$\boxed{(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2}$$

Навистина, имаме дека

$$(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) = A^2 - AB - AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Пример 9. Имаме дека

$$(3a^2b - 2ab)^2 = (3a^2b)^2 - 2\cdot 3a^2b\cdot 2ab + (2ab)^2 = 9a^4b^2 - 12a^3b^2 + 4a^2b^2.$$

$$38^2 = (40-2)^2 = 40^2 - 2\cdot 40\cdot 2 + 2^2 = 1600 - 160 + 4 = 1444. \ ♦$$

3. Производ од збир и разлика на два израза

Производот од збир и разлика на два израза е еднаков на разликата на квадратите од првиот и вториот израз, односно

$$\boxed{(A+B)(A-B) = A^2 - B^2}$$

Навистина, имаме дека

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB + B^2 = A^2 - B^2.$$

Пример 10. Имаме дека

$$(4x+3y)(4x-3y) = (4x)^2 - (3y)^2 = 16x^2 - 9y^2. \ ♦$$

Формулата за производот од збир и разлика на два израза може да ја употребиме за брзо наоѓање на производот на два броја.

Пример 11. Имаме дека

$$58\cdot 62 = (60-2)(60+2) = 60^2 - 2^2 = 3596. \ ♦$$

Ако погорната формула ја запишеме во обратен ред, ќе добиеме дека

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

што значи дека разликата на квадратите на два израза е еднаква на производот од збирот на тие изрази и разликата на првиот со вториот израз.

Формулата за разликата на квадратите на два израза може да ја употребиме за брзо наоѓање на разликата на квадратите на два броја.

Пример 12. Имаме дека

$$237^2 - 236^2 = (237+236)(237-236) = 437\cdot 1 = 437. \ ♦$$

4. Разложување на збир на два куба на множители

Да го пресметаме производот $(A+B)(A^2 - AB + B^2)$. Имаме дека

$$(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + A^2B - A^2B - AB^2 + AB^2 + B^3 = A^3 + B^3.$$

Така доаѓаме до формулата

$$\boxed{(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3}$$

Пример 13. Имаме дека

$$(3+x)(9-3x+x^2)=3^3+x^3=27+x^3.\ \blacklozenge$$

Ако погорната формула ја запишеме во обратен ред, ќе ја добиеме формулата

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$$

која се нарекува формула за збир на кубови.

Пример 14. Имаме дека

$$8x^3+27=(2x)^3+3^3=(2x+3)(4x^2-6x+9).\ \blacklozenge$$

5. Разложување на разлика на два куба на множители

Да го пресметаме производот $(A-B)(A^2+AB+B^2)$. Имаме дека

$$(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3+A^2B-A^2B+AB^2-AB^2-B^3=A^3-B^3.$$

Така доаѓаме до формулата

$$\boxed{(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3}$$

Пример 15. Имаме дека

$$(m-2)(m^2+2m+4)=m^3-8.\ \blacklozenge$$

Ако погорната формула ја запишеме во обратен ред, ќе ја добиеме формулата

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

која се нарекува формула за разлика на кубови.

Пример 16. Имаме дека

$$8-x^3=2^3-x^3=(2-x)(4+2x+x^2).\ \blacklozenge$$

Задачи

1. Помножи ги мономите:

а) $-5a^2b^3$ и $-2a^3b$ **б)** x^3y и $-3a^2x^5y^3$ **в)** $-\frac{3}{4}x^2y^3z$ и $-\frac{4}{7}xy^2$.

2. Изврши го множењето:

а) $(8x^3-4x^2y-5xy^2+3y^2)\cdot(-2x^2y)$ **б)** $(3ab^2c-7a^2bc^2-a^2bc)\cdot(-3abc)$.

3. Помножи ги полиномите:

а) $x^2-xy+2y+3x$ и $x-4y+5$

б) $3a^4-6a^3b+5a^2b^2-7ab^3-9b^4$ и $a^2-3ab+b^2$.

4. Најди ги следниве квадрати и кубови:

а) $(x-5)^2$ **б)** $(3c+2)^2$ **в)** $(1-3x)^2$ **г)** $(3x-y+5)^2$

д) $(x+y-z)^2$ **ѓ)** $(-8y^2-7z)^2$ **е)** $(2a+b)^3$ **ж)** $(x-3y)^3$.

5. Изврши ги назначените операции и упрости ги изразите:

а) $x(x+2)(x-2)-(x-3)(x^2+6x+9)$

б) $(a+b+c)(a+b-c)-(a+b)^2$

3.6. Делење на цели рационални изрази

Делење на моном со моном

Пример 1. Да го извршиме делењето $12a^3b^2c:(-3ab^2),\ a\neq 0,\ b\neq 0.$

Бидејќи делителот $(-3ab^2)$ е производ, според правилото за делење на производ, погорното делење се извршува кога деленикот ќе се подели со првиот множител $-3,$ потоа добиениот резултат ќе се подели со вториот множител $a,$ и на крајот добиениот резултат ќе се подели со третиот множител $b^2.$

Меѓутоа, и деленикот е производ. Затоа, согласно правилото за делење на производ со број, за да се подели деленикот $12a^3b^2c$ со бројот $-3,$ доволно е да се подели еден негов множител со $-3,$ на пример, коефициентот 12. Аналогно, за да се подели добиениот резултат со бројот $a,$ доволно е да се подели само множителот a^2 со $a,$ итн. Така, имаме дека

$$12a^3b^2c:(-3ab^2)=\frac{12}{-3}\cdot\frac{a^3}{a}\cdot\frac{b^2}{b^2}\cdot c=-4a^2c.\ ♦$$

1. (Правило за делење на моном со моном) Моном се дели со моном така што коефициентот на деленикот се дели со коефициентот на делителот, а одделните степени од главната вредност на деленикот се делат со соодветните степени што имаат исти основи во делителот, па потоа добиените количници се множат.

При делењето на моном со моном, количникот не секогаш е моном (цел рационален израз).

Пример 2. Да го поделиме мономот $6a^5$ со $5a^2b.$

Знаеме дека кој било моном помножен со мономот $5a^2b$ мора да го содржи бројот $b,$ а во нашиот деленик овој број не се среќава. Затоа во ваков случај бараниот количник претставува дробно рационален израз и го означуваме во вид на дропка $\dfrac{6a^5}{5a^2b}.$ ♦

Според тоа, ако мономот – делител има некоја променлива или степен што не се содржи во деленикот, или се содржи во деленикот со показател поголем од соодветниот показател во деленикот, тогаш количникот е дробно рационален израз.

Делење на полином со моном

Пример 3. Да го поделиме полиномот $6a^5b^3-5a^4b+7,6a^3b^2c^2$ со $2a^3b.$

Со примена на правилото за делење на алгебарски збир со број, добиваме

$$(6a^5b^3-5a^4b+7,6a^3b^2c^2):2a^3b=6a^5b^3:2a^3b-5a^4b:2a^3b+7,6a^3b^2c^2:2a^3b=$$
$$=3a^2b^2-2,5a+3,8bc^2.\ ♦$$

2. (Правило за делење на полином со моном) Полином се дели со моном така што секој член од полиномот се дели со дадениот моном, а добиените количници се собираат.

Пример 4. $(-12x^4+9x^3y-6x^2y^2):(-3x^2)=4x^2-3xy+2y^2.$ ♦

Делење на полином со полином

Да се подели еден полином со друг, значи да се најде трет полином кој помножен со вториот полином го дава првиот. Количникот при делење на полином со полином само во ретки случаи може да се изрази во вид на полином или моном.

Пример 5. Имаме дека

$$(a^2-4):(a+2)=a-2$$

бидејќи $(a+2)\cdot(a-2)=(a^2-4)$.♦

Во општ случај, количникот на два полиноми може да се запише ви вид на дробно рационален израз.

Пример 6. Имаме дека

$$(a^2+b^2):(a+b)=\frac{a^2+b^2}{a+b}$$

бидејќи не постои полином кој помножен со $a+b$ дава a^2+b^2. ♦

При делење полином со полином користиме слична постапка како и при делењето природни броеви.

Нека A и B се два дадени полинома, такви што $B\neq 0$. При делење на полиномот A со полиномот B се добива:

а) количник Q и остаток $R=0$, при што запишувме

$$\frac{A}{B}=Q, \text{ односно } A=B\cdot Q.$$

Во овој случај, кога остатокот $R=0$, велиме дека полиномот A е делив со полиномот B или дека B се содржи во A.

б) количник Q и остаток R, при што запишуваме

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}, \text{ односно } A=B\cdot Q+R.$$

Постапката на делење ќе ја илустрираме со следниов пример.

Пример 7. Имаме дека

$$\begin{array}{l}
(x-3+2x^2):(3+2x)=\\
(2x^2+x-3):(2x+3)=x-1\\
\underline{\pm 2x^2 \pm 3x}\\
\quad -2x-3\\
\quad \underline{\mp 2x \mp 3}\\
\qquad 0
\end{array}$$

Првиот член од деленикот $2x^2$ се дели со првиот член од делителот $2x$, и се добива првиот член од количникот x. Потоа, првиот член од количникот се множи со делителот и добиениот приозвод се одзема од деленикот. Добиениот прв остаток во примеров е $-2x-3$.

Првиот член од првиот остатокот се дели со првиот член од делителот, и со тоа се добива вториот член од количникот, бројот -1. Вториот член од количникот се множи со делителот, а добиениот производ се одзема од првиот остаток $-2x-3$. Така се добива втор остаток нула, со што го завршуваме делењето и добивме

$$(x-3+2x^2):(3+2x)=x-1, \text{ односно } (x-3+2x^2)=(3+2x)(x-1).♦$$

Задача 1. Изврши го делењето на полиномот $x^2-1+x+2x^3$ со полиномот $1+x+x^2$.

Решение. Имаме дека

$$\begin{array}{l}
(x^2-1+x+2x^3):(1+x+x^2)=\\
(2x^3+x^2+x-1):(x^2+x+1)=2x-1\\
\underline{\pm 2x^3\pm 2x^2\pm 2x}\\
\qquad -x^2-x-1\\
\qquad \underline{\mp x^2\mp x\mp 1}\\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

По завршувањето на делењето и добивме $(x^2-1+x+2x^3):(1+x+x^2)=2x-1$, односно $x^2-1+x+2x^3=(1+x+x^2)(2x-1)$. ♦

Пример 8. Да го поделиме полиномот x^4-x^2+2 со полиномот x^2-x+1. Имаме дека

$$\begin{array}{l}
(x^4-x^2+2):(x^2-x+1)=x^2+x-1\\
\underline{\pm x^4\mp x^3\pm x^2}\\
\qquad x^3-2x^2+2\\
\qquad \underline{\pm x^3\mp x^2\pm x}\\
\qquad\quad -x^2-x+2\\
\qquad\quad \underline{\mp x^2\pm x\mp 1}\\
\qquad\qquad -2x+3
\end{array}$$

Првиот член на остатокот $-2x+3$, не е делив со првиот член на делителот, со што го завршуваме делењето и запишуваме

$$(x^4-x^2+2):(x^2-x+1)=x^2+x-1+\frac{-2x+3}{x^2-x+1}. \ ♦$$

Ако се работи за полиноми со повеќе променливи, тогаш и деленикот и делителот ги подредуваме по степените на една од променливите, почнувајќи од степените со најголем показател до степените на истата променлива со најмал показател.

Пример 9. Да го поделиме полиномот $17x^2y^2+3x^4-33xy^3-9x^3y+22y^4$ со полиномот x^2+2y^2-3xy. Имаме дека

$$\begin{array}{l}
(17x^2y^2+3x^4-33xy^3-9x^3y+22y^4):(x^2+2y^2-3xy)=3x^2+11y^2\\
(3x^4-9x^3y+17x^2y^2-33xy^3+22y^4):(x^2-3xy+2y^2)=3x^2+11y^2\\
\underline{\pm 3x^4\mp 9x^3y\pm 6x^2y^2}\\
\qquad\qquad 11x^2y^2-33xy^3+22y^4\\
\qquad\qquad \underline{\pm 11x^2y^2\mp 33xy^3\pm 22y^4}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

По завршувањето на делењето и добивме

$$(17x^2y^2+3x^4-33xy^3-9x^3y+22y^4):(x^2+2y^2-3xy)=3x^2+11y^2$$

односно $17x^2y^2+3x^4-33xy^3-9x^3y+22y^4=(x^2+2y^2-3xy)(3x^2+11y^2)$. ♦

Задачи

1. Изврши го делењето на мономите:

а) $12x:(-3)$ **б)** $(-6a^3b^2c):(-2a^2bc)$ **в)** $3x^2y^2z:(-5x^2yz)$.

2. Изврши го делењето:

а) $(12a-15b):3$ **б)** $(4x^2y-12x^4y^3):(-4x^2y)$

в) $(6a^2x^4-9a^3x^5+15a^4x^3):ax^3$ **г)** $(-15a^3x^5+10a^4x^4-25a^5x^3):(-5a^3x^3)$.

3. Изврши ги назначените операции во изразите:

а) $(a^2-2ab)\cdot 3a+(6ab^3-12a^4b^2):3ab$

б) $(15a^2x^3-6a^3x^2):(-3a^2x^2)-2x^2(3+4a^2x)$

в) $(x+3y)(x-3y)-\frac{1}{4}(2x+y)(2x-y):\frac{y}{2}$

4. Изврши го делењето на полиномите:

а) $(x^4+x^2+1):(x^2+x+1)$

б) $(6a^3b-11a^2b^2+b^4):(3a-b)$

в) $(3x^5-8x^4+8x^3-5x^2+3x-1):(x^2-2x+1)$.

5. Провери дали полиномот $x^5+2x^4-3x^3+x^2+2x-3$ е делив со биномот

а) $x-2$ **б)** $x-1$ **в)** $x+2$ **г)** $x+3$.

3.7. Разложување на полиноми на множители

Да се разложи полином на множители значи тој идентички да се трансформира во вид на производ на два или неколку други рационални изрази.

Пример 1. Полиномот $ax+bx-cx$ со примена на дистрибутивниот закон на множењето може да се претстави во вид на производ на два рационални изрази, односно да се запише во облик $x(a+b-c)$. ♦

За разложување на полиномите, не постои општо правило со кое се извршуваат потребните трансформации. Затоа, овде ќе посочиме неколку постапки за разложување на полиномите коишто најчесто се применуваат.

Разложување со извлекување на заеднички множител пред заграда

Разложувањето на полиномите на множители со извлекување на заеднички множител пред заграда се заснова на дистрибутивниот закон на множењето. Така, од идентитетот $(a+b-c)m=am+bm-cm$, со промена на неговите страни, добиваме

$$am+bm-cm=(a+b-c)m.$$

1. (Правило за разложување со извлекување на заеднички множител) Ако сите членови на даден полином имаат еден ист заеднички множител, тој може да се извлече пред заграда. Тогаш во заградата останува полиномот кој се добива кога дадениот полином ќе се подели со извлечениот заеднички множител пред заграда.

Пример 1. Да го разложиме на множители полиномот

$$10a^3bx^2-5a^3b^2x-15a^2b^3.$$

Најнапред да забележиме дека бројот 5 е заеднички делител на коефициентите на сите членови. Освен бројот 5, сите членови на полиномот имаат уште и заеднички множители a и b во различни степени. Тие може да се извлечат пред заграда во најниските степенови показатели, a во втор и b во прв степен. Променливата x не е заеднички множител, бидејќи не се содржи во третиот член.

Според тоа, заеднички множител на сите членови на дадениот полином е мономот $5a^2b$. Потоа така најдениот моном го извлекуваме пред заграда, а во заградата го запишуваме количникот од делењето на дадениот полином и заедничкиот множител $5a^2b$, односно

$$10a^3bx^2-5a^3b^2x-15a^2b^3=5a^2b(2ax^2-abx-3b^2). \ \blacklozenge$$

Пред заградата може да се извлече и само множителот -1.

Пример 2. Имаме дека $b-a=-(-b+a)=-(a-b)$, $1-x=-(x-1)$. ♦

Заедничкиот множител што се извлекува пред заграда може да биде не само моном, туку полином.

Пример 3. Имаме дека $2a(x-3)+b(x-3)-5c(x-3)=(x-3)(2a+b-5c)$. ♦

Разложување со групирање на членовите

Разложувањето на полиномите на множители со групирање на членовите се заснова на правилото за множење на полином со полином. Така, познато е дека

$$(a-b)(c+d)=(a-b)c+(a-b)d=ac-bc+ad-bd.$$

Ако полиномот $ac-bd+ad-bd$ треба да се разложи на множители, тогаш трансформацијата ќе ја извршиме во обратен редослед

$$ac-bc+ad-bd=(a-b)c+(a-b)d=(a-b)(c+d).$$

Тука ги групираме првиот со вториот член и од нив го извлековме c пред заграда, потоа ги групираме третиот и четвртиот член и од нив извлекуваме d пред заграда. Така, го добиваме изразот $c(a-b)+d(a-b)$, во кој јасно се гледа заедничкиот множител $a-b$. Со извлекување на тој множител пред заграда го добиваме разложувањето $(a-b)(c+d)$. Овој начин на разложување на полином на множители се вика **разложување со групирање**.

Пример 4. Да го разложиме на множители полиномот

$$3ax+2b-bx-6a.$$

Дадениот полином може да се разложи на множители ако се групираат првиот со четвртиот и вториот со третиот член. Имаме

$$\begin{aligned}3ax+2b-bx-6a&=(3ax-6a)+(2b-bx)=\\&=3a(x-2)-b(x-2)=(x-2)(3a-b). \ \blacklozenge\end{aligned}$$

2. (Правило за разложување со групирање) Членовите на даден полином се групираат така што секоја група има заеднички множител. По извлекувањето на заедничкиот множител со соодветниот знак од секоја група пред заграда, во заградите треба да се добие еден ист полином. Потоа, тој полином се извлекува пред заграда како нов заеднички множител.

Пример 5. Имаме дека

$$2xy-2y-x+1=2y(x-1)-(x-1)=(x-1)(2y-1). \ \blacklozenge$$

Разложување со примена на формулите за скратено множење

Некои полиноми може да се разложат на множители со примена на формулите за скратено множење. Притоа, формулите за скратено множење ги запишуваме во обратен ред, односно

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

Пример 6. Да го разложиме на прости множители полиномот $4a^2 - 25b^2$. Забележуваме дека $4a^2 = (2a)^2 = A^2$ и $25b^2 = (5b)^2 = B^2$, односно дека дадениот полином е од облик $A^2 - B^2$. Со примена на првата од погорните формули за скратено множење добиваме

$$4a^2 - 25b^2 = (2a)^2 - (5b)^2 = (2a-5b)(2a+5b). \ \blacklozenge$$

Пример 7. Да го разложиме на прости множители полиномот $8y^3 + 1$. Забележуваме дека $8y^3 = (2y)^3 = A^3$ и $1 = 1^3 = B^3$, односно дека дадениот полином е од облик $A^3 + B^3$. Со примена на третата од погорните формули за скратено множење добиваме

$$8y^3 + 1 = (2y)^3 + 1^3 = (2y+1)((2y)^2 - 2y + 1) = (2y+1)(4y^2 - 2y + 1). \ \blacklozenge$$

Задача 1. Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $(3x+2)^2 - 16y^2$ **б)** $y^3 - 8$ **в)** $a^3b^3 + 125$.

Решение. Имаме дека

а) $(3x+2)^2 - 16y^2 = ((3x+2) - 4y)((3x+2) + 4y) = (3x - 4y + 2)(3x + 4y + 2)$

б) $27y^3 - 8 = ((3y) - 1)((3y)^2 + 3y + 1) = (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1)$

в) $a^3b^3 + 125 = ((ab) + 5)((ab)^2 - ab + 5) = (ab+5)(a^2b^2 - ab + 5). \ \blacklozenge$

Разложување со последователна примена на неколку начини

Во некои случаи, за да се изврши до крај разложувањето на полиномот, потребно е да се применат последователно некои од погорните три начини. Тоа вообичаено се изведува, така што:

- гледаме дали сите членови на полиномот имаат заеднички множители кои се извлекуваат пред заграда, а потоа
- гледаме дали може полиномот што се добива во заградата да се разложи со групирање или со примена на некоја од формулите за скратено множење.

Задача 2. Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $24x^3y^2 - 3y^2$ **б)** $3x^3y^2 - 15x^2y + 3x^3y - 15x^3$.

Решение. Имаме дека

а) $24x^3y^2 - 3y^2 = 3y^2(8x^3 - 1) = 3y^2(2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$

б) $3x^2y^2 - 15x^2y + 3x^3y - 15x^3 = 3x^2(y^2 - 5y + xy - 5x) =$

$$= 3x^2(y(y-5) + x(y-5)) = 3x^2(y-5)(y+x). \blacklozenge$$

Задачи

Разложи ги полиномите на прости множители.

1. а) $3x+6y$ **б)** $2ab-2ac$ **в)** $7x^5+21x^3$.

2. а) $27ab^3-9b^4$ **б)** a^2y-ay^3 **в)** $9ax-6ay+12az$

3. а) $2a(b-3)+5c(b-3)$ **б)** $a(x+1)-b(x+1)$ **в)** $5(x+y)-2(x+y)^2$.

4. а) a^2b^2-4 **б)** $100x^2-1$ **в)** $\frac{1}{9}a^2-c^2$.

5. а) a^3-8 **б)** $27x^3+1$ **в)** $8m^3-n^3$.

6. а) $4a^2-b^2-2bc-c^2$ **б)** x^2-3x-y^2+3y **в)** $xa^3-xb^3-ya^3+yb^3$.

3.8. Најголем заеднички делител и најмал заеднички содржател на цели рационални изрази

Најголем заеднички делител на цели рационални изрази

Заеднички делител на два или повеќе цели рационални изрази е цел рационален израз со кој се деливи без остаток сите дадени рационални изрази.

Пример 1. а) За мономите $12a^3x^2$ и $18a^2x^4y^2$ заеднички делители се 1, $2a$, $6x^2$, $3a^2x$, $6a^2x^2$ итн.

б) За полиномите $ab(a-b)$ и $b(a-b)^2$ заеднички делители се 1, b, $a-b$, $b(a-b)$. ♦

Дефиниција 1. Заеднички делител на неколку цели рационални изрази $A_1, A_2, \ldots, A_n$ којшто содржи најмногу заеднички множители со можно најголем показател се вика **најголем заеднички делител** на тие изрази, и се означува со

$$\text{НЗД}(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Најголемиот заеднички делител на неколку мономи со цели коефициенти се наоѓа така што

- се наоѓа НЗД за сите коефициенти, и потоа
- се допишуваат последователно сите заеднички множители, при што секој од нив се зема со најмалиот показател со кој се јавува во мономот.

Пример 2. $\text{НЗД}(14a^2b^2x, 35ab^3x^2, 42a^2b^3xy^2) = 7ab^2x$. ♦

Најголемиот заеднички делител на неколку полиноми со цели коефициенти се наоѓа така што

- полиномите се разложуваат на прости множители, и потоа
- се наоѓа производот од сите заеднички прости множители што имаат најголем показател.

Пример 3. За најголемиот заеднички делител на полиномите од пример 1 имаме $\text{НЗД}(ab(a-b), b(a-b)^2) = b(a-b)$. ♦

Задача 1. Најди $\text{НЗД}(3x^2+6x+3, 9x^2-9, 6x+6)$.

Решение. Бидејќи имаме дека

$$3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=\underline{3(x+1)^2},$$

$$9x^2-9=9(x^2-1)=\underline{9(x-1)(x+1)}, \text{ и}$$

$$6x+6=\underline{6(x+1)},$$

добиваме дека НЗД$(3x^2+6x+3, 9x^2-9, 6x+6)=3(x+1)$. ♦

Може да се случи дадените изрази да немаат ниту еден заеднички делител (множител). Тогаш нивниот најголем заеднички делител е 1. Таквите изрази се викаат **заемно прости изрази**.

Пример 4. Изразите $x-y$ и $3x^2+y$ се заемно прости, односно

НЗД$(x-y, 3x^2+y)=1$.

Најмал заеднички содржател на цели рационални изрази

Заеднички содржател на два или повеќе цели рационални изрази е цел рационален израз којшто се дели без остаток со секој од дадени изрази.

Пример 5. За мономите $4a^3b$ и $6a^2x^4$ заеднички содржател е било кој од изразите $12a^3bx^4$, $24a^5b^3x^6$, $60a^3bx^5(a-b)$ итн. ♦

Дефиниција 2. Заеднички содржател на неколку цели рационални изрази $A_1, A_2, \ldots, A_n$ кој содржи најмалку заеднички множители со можно најмали показатели се вика **најмал заеднички содржател** на тие изрази, и се означува со

НЗС$(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Пример 6. НЗС$(4a^3b, 6a^2x^4)=12a^3bx^4$. ♦

Најмалиот заеднички содржател на неколку мономи со цели коефициенти се наоѓа така што

- се наоѓа НЗС за сите коефициенти, и потоа
- се допишуваат последователно сите заеднички и незаеднички множители, при што секој од нив се зема со највисокиот малиот показател со кој се појавува во мономот.

Пример 7. НЗС$(4a^3b, 6a^2x, 9a^3bx^2)=36a^3bx^2$. ♦

Најмалиот заеднички содржател на неколку полиноми со цели коефициенти се наоѓа така што

- полиномите се разложуваат на прости множители, и потоа
- се наоѓа производот од сите различни прости множители што се содржат во дадените полиноми, пришто секој множител се зема со највисокиот показател.

Задача 2. Најди НЗС$(4x^3-4x^2y, 15x^3y^2-15xy^4, 6x^2y+12xy^2+6y^3)$.

Решение. Полиномите ги разложуваме на прости множители

$$4x^3-4x^2y=\underline{4x^2(x-y)},$$

$$15x^3y^2-15xy^4=15xy^2(x^2-y^2)=\underline{15xy^2(x-y)(x+y)}, \text{ и}$$

$$6x^2y+12xy^2+6y^3=6y(x^2+2xy+y^2)=\underline{6y(x+y)^2}.$$

Добиваме дека

$$\text{НЗС}\,(4x^3-4x^2y, 15x^3y^2-15xy^4, 6x^2y+12xy^2+6y^3)=60x^2y^2(x-y)(x+y)^2. \blacklozenge$$

Задачи

1. Најди НЗД за броевите:

а) 42 и 18 **б)** 105 и 45 **в)** 30 и 75 **г)** 12, 32, 40 и 56.

2. Најди го најголемиот заеднички делител на изразите:

а) $3ab$ и $12ab^2$ **б)** $15x^3y^2$ и $24x^2y^3$ **в)** $5a(a+b)^2$ и $8a^2b(a+b)^3$

г) x^2-y^2 и x^3+y^3 **д)** $x^2y^2-y^4$, $x^4-x^2y^2$ и x^3y-xy^3.

3. Најди НЗС за броевите:

а) 12, 50, 45 и 18 **б)** 84, 56 и 21 **в)** 125, 100 и 450 **г)** 96, 64 и 180.

4. Најди го најмалиот заеднички содржател на изразите:

а) $6a^2b^3$, $15ab^2$ и $24a^3bc^2$ **б)** $a(x+2)$ и $b(x+2)$

в) x и x^2+xy^2 **г)** a^2-9b^2 и a^3+3a^2b

д) x^2-x, $1-x^2$, $1+x^3$ и x^2-x+1

ѓ) x^2-4y^2, $3x^2-12xy+12y^2$ и $5y(x-2y)^3$.

3.9. Алгебарски дропки

Поим за алгебарска дропка

Знаеме дека дробно рационален израз содржи делење со променлива или делење со израз што содржи променлива.

Пример 1. Дробно рационални изрази се:

$$\frac{3}{x-4},\quad \frac{a^2+2}{3ab^2},\quad 2ax+\frac{a^2}{x},\quad \frac{x+\frac{2}{x}}{3x^2-5},\quad \frac{2ab-4a^2}{ab^2-5c}\ \text{итн.}\ \blacklozenge$$

Дефиниција. Дробно рационален израз кој претставува дропка чиј броител и именител се цели рационални изрази се вика **алгебарска дропка**.

Алгебарските дропки, исто како обичните имаат смисла само кога именителот не им е еднаков на нула. Затоа, **допуштени вредности** на аргументите во една алгебарска дропка се само оние вредности за кои именителот на таа дропка е различен од нула.

Пример 2. Дропката $\frac{a+3}{a-4}$, за $a=4$ нема смисла, а за сите други вредности на a таа има смисла. Според тоа, допуштени вредности на аргументот a се сите вредности за кои $a\neq 4$. За $a=-3$ броителот на дропката е еднаков на нула, а именителот е различен од нула. Спред тоа, за $a=-3$ бројната вредност на дадената дропка е еднаква на нула. ♦

Пример 3. Дропката $\frac{x^2+1}{x-y}$ има смисла за сите нееднакви вредности на x и y, односно за $x \neq y$. Бидејќи броителот на дропката x^2+1 не може да биде еднаков на нула за ниту една вредност на x, оваа дропка не може да има бројна вредност еднаква на нула. ♦

Проширување и скратување на алгебарска дропка

На секоја алгебарска дропка можеме да гледаме и како на количиник од два цели рационални изрази. Веќе видовме, дека количникот од два рационални броја не се менува ако и деленикот и делителот ги помножиме (или поделиме) со еден ист број (кој не е нула), односно

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m} \text{ и } \frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}, \text{ при } b\neq 0 \text{ и } m\neq 0.$$

Уште повеќе, ако е дадена алгебарска дропка $\frac{A}{B}$, $B\neq 0$, каде што A и B претставуваат цели рационални изрази и ако M е кој било број или цел рационален израз, при претпоставка $B\neq 0$, тогаш ќе важат идентитетите:

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot M}{B\cdot M} \text{ и } \frac{A}{B}=\frac{A:M}{B:M}, \text{ при } B\neq 0 \text{ и } M\neq 0.$$

Со други зборови, ако броителот и именителот на алгебарската дропка се поможат или поделат со еден ист број или со еден ист цел рационален израз различен од нула, ќе се добие нова дропка, идентички еднаква на дадената.

Во случај кога броителот и именителот на алгебарската дропка ќе се поможат со еден ист број или со еден ист цел рационален израз $M\neq 0$, велиме дека алгебарска дропка е проширена со $M\neq 0$, а постапката се вика **проширување на алгебарска дропка**.

Пример 4. Алгебраската дропка $\frac{a}{a+2}$, $a\neq -2$, проширена со алгебарскиот израз $a-2$, $a\neq 2$, добива облик

$$\frac{a(a-2),}{(a+2)(a-2)}=\frac{a^2-2,}{a^2-4},\ a\neq \pm 2. \ ♦$$

Во случај кога броителот и именителот на алгебарската дропка ќе се поделат со производот на нивните заеднички множители велиме дека алгебарска дропка е скратена со производот на заедничките множители, а постапката се вика **скратување на алгебарска дропка**.

Пример 5. Алгебраската дропка $\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2}$ чии броители и именители се мономи, имаат заеднички множители: 6, a^2 и b^2. Дропката може да се упрости, ако броителот и именителот се поделат последователно со тие множители или со нивниот производ $6a^2b^2$, кој воедно е најголемиот заеднички делител. Така добиваме:

$$\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2}=\frac{12a^2b^3c:6a^2b^2}{18a^4b^2:6a^2b^2}=\frac{2bc}{3a^2},$$

при што, претпоставуваме дека $a \neq 0$ и $b \neq 0$.♦

Ако броителот и именителот на една дропка се полиноми, тогаш нив прво ги разложуваме на прости множители, а потоа кратиме, ако во броителот и именителот се појават заеднички множители.

Задача 1. Скрати ги дропките

а) $\frac{6a^2b}{3a^2-3ab}$, $a \neq 0$ и $a \neq b$ **б)** $\frac{x^2-6x+9}{2x^2-6x}$, $x \neq 3$ и $x \neq 0$.

Решение. а) $\frac{6a^2b}{3a^2-3ab} = \frac{6a^2b}{3a(a-b)} = \frac{2ab}{a-b}$, $a \neq 0$ и $a \neq b$.

б) $\frac{x^2-6x+9}{2x^2-6x} = \frac{(x-3)^2}{2x(x-3)} = \frac{x-3}{2x}$, $x \neq 3$ и $x \neq 0$. ♦

Доведување на алгебарски дропки на еднаков именител

Со проширување, две или неколку алгебарски дропки со различни именители може да се трансформираат во дропки со еднакви именители. Таа трансформација се вика **доведување на еднаков именител.** За заеднички именител на неколку алгебарски дропки, обично се зема рационален израз, кој ги содржи сите именители на дадените дропки без остаток. Еден таков израз е производот на сите именители. Друг израз може да биде и најмалиот заеднички содржател за именителите на дадените дропки.

Доведувањето на еднаков именител кој е еднаков на најмалиот заеднички содржател на именителите на дадените дропки, се врши на следниов начин:

- Го наоѓаме најмалиот заеднички содржател на именителите на дадените алгебарски дропки;
- Ги наоѓаме соодветните проширувачи на именителите на секоја дропка. Тоа се изрази што се добиваат, кога најдениот најмалиот заеднички содржател ќе се подели со соодветниот именител на дадените дропки;
- Потоа ги множиме броителот и именителот на секоја дропка со соодветниот проширувач.

Пример 6. Да ги доведеме на најмал заеднички именител дропките:

$$\frac{a}{2x^2y},\ \frac{b}{3y} \text{ и } \frac{c}{4xy}.$$

Најмалиот заеднички именител е

$$\text{НЗС } (2x^2y, 3y, 4xy) = 12x^2y.$$

Според тоа, имаме дека

$$\frac{a}{2x^2y} = \frac{a \cdot 6}{2x^2y \cdot 6} = \frac{6a}{12x^2y},$$

$$\frac{b}{3y} = \frac{b \cdot 4x^2}{3y \cdot 4x^2} = \frac{4bx^2}{12x^2y};$$

$$\frac{c}{4xy} = \frac{c \cdot 3x}{4xy \cdot 3x} = \frac{3cx}{12x^2y}. ♦$$

Задачи

1. За кои вредности на x, дропките:

а) $\dfrac{x+2}{x}$ **б)** $\dfrac{x-3}{x-1}$ **в)** $\dfrac{1}{(x-2)(x-5)}$

немаат смисла, а за кои стануваат еднакви на нула ?

2. Скрати ги дропките:

а) $\dfrac{6ax}{8a^2}$ **б)** $\dfrac{3x^{n+2}}{x^n y}$ **в)** $\dfrac{x^2-y^2}{ax+ay}$

г) $\dfrac{3a+1}{9a^2-1}$ **д)** $\dfrac{3a+6}{a^3+8}$ **ѓ)** $\dfrac{2a(x-3y)}{6a^2(3y-x)}$

3. Скрати ги дропките и пресметај ја нивната вредност:

а) $\dfrac{a-1}{2a-2a^2}$, за $a=3$ **б)** $\dfrac{x^2-4}{x+2}$, за $x=3,5$ **в)** $\dfrac{x-1}{1-x}$, за $x=a$.

4. Доведи ги допките на еднаков именител:

а) $\dfrac{1}{a}$ и $\dfrac{2}{a+1}$ **б)** $\dfrac{2}{3a^2b^3}$, $\dfrac{5a}{6b^3c^2}$ и $\dfrac{1}{5abc}$

в) $\dfrac{a}{x+y}$ и $\dfrac{b}{(x+y)^2}$ **г)** $\dfrac{2x}{x+y}$, $\dfrac{2y}{x-y}$ и $\dfrac{xy}{x^2-y^2}$

д) $\dfrac{5}{2x-1}$ и $\dfrac{x}{4x^2-2x}$ **ѓ)** $\dfrac{2a}{a^3-ax^2}$, $\dfrac{3x}{x+a}$ и $\dfrac{5a}{x^2+2ax+a^2}$

3.10. Операции со алгебарски дропки

Собирање и одземање на алгебарски дропки

Правилата за собирање и одземање на алгебарски дропки се исти како и тие за обичните дропки.

1. (Правило за собирање) Алгебарските дропки со еднакви именители се собираат, така што се собираат нивните броители, па добиениот збир се дели со нивниот заеднички именител, односно,

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\ C\neq 0.$$

Пример 1. а) $\dfrac{3a}{2a^2x}+\dfrac{5ab}{2a^2x}+\dfrac{a-2b}{2a^2x}=\dfrac{4a+5ab-2b}{2a^2x},\ ax\neq 0$

б) $\dfrac{2a}{x-1}+\dfrac{3a-1}{x-1}+\dfrac{2-ab}{x-1}=\dfrac{2a+3a-1+2-ab}{x-1}=\dfrac{5a+1-ab}{x-1},\ x\neq 1.$ ♦

2. (Правило за одземање) Алгебарските дропки со еднакви именители се одземаат, така што од броителот на намаленикот се одзема броителот на намалителот, па добиената разлика се дели со нивниот заеднички именител, односно

$$\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C},\ C\neq 0.$$

Пример 2. а) $\frac{a}{c}-\frac{a+3}{c}=\frac{a-(a+3)}{c}=\frac{a-a-3}{c}=-\frac{3}{c},\ c\neq 0$

б) $\frac{2a}{x-1}-\frac{3a-1}{x-1}-\frac{2-ab}{x-1}=\frac{2a-3a+1-2+ab}{x-1}=\frac{-a-1+ab}{x-1},\ x\neq 1.$ ♦

Ако алгебарските дропки имаат различни именители, тогаш тие претходно треба да се доведат на еднаков именител, а по тоа се собираат или одземаат како дропки со еднакви именители.

Пример 3. а) $\frac{5b}{2a^2}+\frac{3}{4ab}+\frac{2b}{a}=\frac{5b\cdot 2b+3\cdot a+2b\cdot 4ab}{4a^2b}=\frac{10b^2+3a+8ab^2}{4a^2b}$

б) $\frac{2}{c-x}+\frac{3}{x-c}-\frac{1}{x}=-\frac{2}{x-c}+\frac{3}{x-c}-\frac{1}{x}=\frac{-2x+3x-(x-c)}{x(x-c)}=\frac{c}{x(x-c)}$

в) $a+\frac{ax}{a-x}=\frac{a}{1}+\frac{ax}{a-x}=\frac{a(a-x)+ax}{a-x}=\frac{a^2}{a-x}$

г) $\frac{b^2}{2a+b}+2a-b=\frac{b^2}{2a+b}+\frac{2a-b}{1}=\frac{b^2+(2a-b)(2a+b)}{2a+b}=\frac{4a^2}{2a+b}.$ ♦

Множење и делење на алгебарски дропки

За множење и делење на алгебарските дропки важат истите правила како и за обичните дропки.

3. (Правило за множење) Алгебарските дропки се множат, така што одделно се множат нивните броители и именители, па првиот производ се зема за броител, а вториот за именител на производот, односно

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},\ B\neq 0,\ D\neq 0.$$

Пример 4. а) $\frac{5a^2x}{3by^3}\cdot\left(-\frac{9b^2y}{10ax^2}\right)=-\frac{5a^2x\cdot 9b^2y}{3by^3\cdot 10ax^2}=-\frac{3ab}{xy^2},\ abxy\neq 0$

б) $\frac{x-1}{2y}\cdot\frac{4y^2}{(1-x)^2}=\frac{4y^2(x-1)}{2y(x-1)^2}=\frac{2y}{x-1},\ x\neq 1,\ y\neq 0.$♦

При множењето на алгебарските дропки треба да се види дали може да се изврши скратување. За таа цел, броителите и именителите, (ако се полиноми) ги разложуваме на множители, а скратувањето го вршиме пред множењето на броителите и именителите, како што е покажано погоре.

Правилото за степенување на алгебарските дропки е исто, како и правилото за степенување на обичните дропки.

4. (Правило за степенување) Алгебарска дропка се степенува, така што нејзиниот броител и именител одделно се степенуваат со истиот степенов показател, па потоа првиот степен се дели со вториот, односно

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n},\ B\neq 0,\ n\in\mathbb{N}.$$

Пример 5. $\left(\frac{2a^2x}{3b}\right)^3=\frac{(2a^2x)^3}{(3b)^3}=\frac{8a^6x^3}{27b^3}.$ ♦

5. (Правило за делење) Алгебарските дропки се делат, така што дропката – деленик се множи со реципрочната вредност на дропката – делител.

Пример 6. а) $-\frac{28a}{5b^3}:\frac{14a^2}{15b^4}=-\frac{28a}{5b^3}\cdot\frac{15b^4}{14a^2}=-\frac{28a\cdot15b^4}{5b^3\cdot14a^2}=-\frac{6b}{a},\ a\neq0,\ b\neq0$

б) $\frac{x}{x^2-16}:\frac{x^3+4x^2}{x-4}=\frac{x}{x^2-16}\cdot\frac{x-4}{x^3+4x^2}=\frac{x}{(x-4)(x+4)}\cdot\frac{x-4}{x^2(x+4)}=$

$=\frac{x(x-4)}{x^2(x-4)(x+4)^2}=\frac{1}{x(x+4)^2},\ x\neq\pm4,\ x\neq0$

в) $\frac{a^2-b^2+2a+1}{3x^2}:(a-b+1)=\frac{(a+1)^2-b^2}{3x^2}:\frac{a-b+1}{1}=$

$=\frac{(a+1-b)(a+1+b)}{3x^2}\cdot\frac{1}{a-b+1}=\frac{a+b+1}{3x^2},\ a-b+1\neq0,\ x\neq0.$ ♦

Дефиниција 1. Дропка, чиј броител или именител или и броителот и именителот, се алгебарски дропки, се вика **двојна алгебарска дропка**.

Пример 7. Дропките

$$\frac{\frac{2a}{a+1}}{x-5},\quad \frac{x+1}{\frac{a+1}{x-1}},\quad \frac{\frac{a^2-4a+4}{x^2-1}}{\frac{a^2-4}{x^2+x}}\quad \text{и}\quad \frac{\frac{a^2}{b^3}+\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{a}{b^2}},$$

се примери на двојни алгебарски дропки. ♦

Броителот и именителот на двојна алгебарска дропка може да претставуваат и алгебарски збирови од дропки или кој било дробен рационален израз.

Во двојна дропка $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}$, изразите A и D се викаат **надворешни**, а B и C **внатрешни** членови на дропката.

Секоја двојна алгебарска дропка може наједноставно идентички да се трансформира во обична алгебарска дропка, кога нејзиниот броител се подели со именителот.

Пример 8. Имаме дека

а) $\frac{\frac{2a}{a+1}}{x-5}=\frac{2a}{a+1}:(x-5)=\frac{2a}{a+1}\cdot\frac{1}{(x-5)}=\frac{2a}{(a+1)(x-5)},\ a\neq-1,\ x\neq-5.$

б) $\frac{\frac{a^2-4a+4}{x^2-1}}{\frac{a^2-4}{x^2+x}}=\frac{a^2-4a+4}{x^2-1}:\frac{a^2-4}{x^2+x}=\frac{a^2-4a+4}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+x}{a^2-4}=$

$=\frac{(a-2)^2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x(x+1)}{(a-2)(a+2)}=\frac{x(a-2)}{(x-1)(a+2)},\ x\neq\pm1,\ a\neq\pm2$ и $x\neq0.$♦

За двојните алгебарски дропки важи истото правило како и за обичните дропки.

6. (Правило за трансформирање на двојна алгебарска делење) Двојна алгебарска дропка се трансформира во обична, така што производот на надворешните членови се зема за броител, а производот на внатрешните членови за именител на обичната алгебарска дропка.

Пример 9. Имаме дека

$$\frac{\frac{x}{x^2-9}}{\frac{x^3+3x^2}{x-3}}=\frac{x(x-3)}{(x^3+3x^2)(x^2-9)}=\frac{x(x-3)}{x^2(x+3)(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{1}{x(x+3)^2},\ x\neq\pm3,\ x\neq0.\ ♦$$

Задачи

Изврши ги означените операции со дропките:

1. а) $\frac{a+2}{b}+\frac{2a-5}{b}$ **б)** $\frac{2a+1}{a}+\frac{3x-1}{a}-\frac{x-2}{a}$

2. а) $\frac{3}{x+1}-\frac{5}{2x+1}$ **б)** $\frac{1}{x^2-4x+4}+\frac{5}{x^2-4}$

3. а) $\frac{2}{x^4-1}+\frac{x}{1-x^2}+\frac{1}{x+1}$ **б)** $\frac{5}{2a+4}-\frac{4}{a^2-4}+\frac{1}{a-2}$

4. а) $\frac{3a+1}{2a+6}-\frac{a-1}{a+3}$ **б)** $\frac{1}{x-3}-\frac{x+1}{x^2-9}+\frac{2}{x^2+6x+9}$

5 а) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{2a}{a-b}$ **б)** $\frac{x-2}{6x+2y-2z}\cdot\frac{3x+y-z}{2x-x^2}$

6 а) $\frac{x-1}{2y}:\frac{(1-x)^2}{4y^2}$ **б)** $\frac{x^2-xy}{a^2+a}:\frac{2x-2y}{3a+3}$

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Изврши ги назначените операции:

а) $(-0,81):[-5-(6-10):2]-3,5\cdot(-8)$ **б)** $(-6)^2-(-2)^4+(-3)^3-5^2$

2. а) Пресметај ги вредностите на изразите:

а) $\dfrac{1+0,5\cdot\frac{1}{0,25}}{6-\frac{46}{4+1,8\cdot10}}$ **б)** $\dfrac{\left(0,3-\frac{3}{20}\right)\cdot1,5}{\left(1,88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}-\frac{3}{4}.$

3. Изврши ги назначените операции со степените:

а) $x \cdot x^5 \cdot x^2$ **б)** $(a \cdot b)^4 \cdot a^3$ **в)** $\left(\frac{a}{2c}\right)^3$

4. Кои од следниве изрази се цели рационални, а кои дробно рационални:

а) $0,34ax^3 - 6bxc^2$ **б)** $1:x$ **в)** $\frac{y-1}{y+1} + x^2$ **г)** $\frac{1}{2}$?

5. Дали следните формули се идентитети:

а) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc$

б) $(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

6. Изврши го собирањето на полиномите $3x^2 - x + 1$, $2x^2 + 5x - 3$ и $4x - 5$.

7. Изврши го означеното одземање на мономите:

а) $4xy - (+3x)$ **б)** $2,5x - (-0,5x)$

8. Дадени се полиномите:

$$A = x^2 - xy + 2y - 5,\ B = 2x^2 + 3xy - y^2 \text{ и } C = -3x^2 + xy + 4x + 1.$$

Пресметај го изразот $C - (A - B)$.

9. Изврши ги назначените операции и упрости ги изразите:

а) $(x+y)^2 - (x-y)^2 + (x-y)(x+y)$

б) $(c+1)^2 + 3(c-1)^2 - 5(c+1)(c-1)$.

10. Пресметај на најбрз начин:

а) 401^2 **б)** 703^2 **в)** 1002^2.

11. Упрости го изразот $2(a-1)^2 - (a+5)(a^2 - 5a + 25) + (a+1)^3$.

12. Изврши го делењето на полиномите $(x^4 + x^2 + 1):(x^2 - x + 1)$.

13. Разложи ги полиномите на множители:

а) $a^3 + 3a^2 + 3a + 9$ **б)** $12ax - 6bx + 2ay - by$

14. Разложи ги полиномите на множители:

а) $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ **б)** $x^3 + y^3 + (x+y)^2 + x^2 - y^2$

15. Разложи ги полиномите на множители:

а) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ **б)** $x^3 - 3x^2 + x + ax^2 - 3ax + a$

16. Најди го НЗД на изразите:

а) 60, 900 и 75 **б)** $2ab$, $3bc$ и $4ac$.

17. Најди го НЗС на изразите:

а) 75, 60 и 125 **б)** $3x^3ab$, $5xa^4$ и $10x^2b^3$.

18. Скарти ги дропките:

а) $\frac{xy-x^2}{xy^2-x^2y}$ **б)** $\frac{x^2-1}{1-2x+x^2}$.

19. Доведи ги на еднаков именител дропките $\frac{2a^2}{b}$, $\frac{5b^2}{c}$, и $\frac{7c^2}{a}$.

20. Изврши ги назначените операции:

а) $\frac{1}{x-c}-\frac{1}{x+c}+\frac{1-2c}{x^2-c^2}$ **б)** $\frac{(x+1)^2}{x}-\frac{(x-1)^2}{x}$.

21. Упрости го изразот $\left(\frac{a^2+1}{2a}-1\right):\left(\frac{a^2+1}{2a}+1\right)$.

22. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{(a+b)^3-a^3-b^3}{a+b}$, ако $ab=5$.

4. ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ НА ВЕЛИЧИНИ

4.1. Поим за пропорција и основни својства

Размери и пропорции

Нека се дадени две истородни величини, чии мерни броеви a и b се изразени со иста единица мерка. Кога ги споредуваме тие величини често се прашуваме:

а) Колку пати едната величина е поголема од другата величина, или

б) Колкав дел од едната величина претставува другата величина?

За да одговориме на поставените прашања, треба мерниот број на едната величина да го поделиме со мерниот број на другата величина, односно да го составиме количникот $a:b$, (или $\frac{a}{b}$), $b \neq 0$.

Дефиниција. Количникот $a:b$, (или $\frac{a}{b}$) на мерните броеви на две еднородни величини се вика **размер** на тие величини.

Броевите a и b се викаат **членови на размерот**, поточно a се вика **прв член**, а b **втор член** член на размерот. Вредноста на пресметаниот количник се вика **вредност на размерот.**

Размерите $a:b$ и $b:a$, кои се разликуваат само по местата на своите членови, се викаат **заемно обратни размери**.

Пример 1. Размерите $5:8$ и $8:5$ се заемно обратни размери. ♦

Дефиниција. Два размера со еднакви вредности сврзани со знакот за равенство сочинуваат **пропорција**.

Во таа смисла, ако е дадена пропорцијата $a:b=c:d$, тогаш велиме дека a спрема b се однесува како c спрема d, или размерот a спрема b е еднаков на размерот c спрема d.

Пример 2. Следниве равенства се пропорции:

а) $12:3=20:5$, бидејќи $12:3=4$ и $20:5=4$;

б) $\frac{1}{4}:3=\frac{5}{6}:10$, бидејќи $\frac{1}{4}:3=\frac{1}{12}$ и $\frac{5}{6}:10=\frac{1}{12}$;

в) $1,2:0,4=4,5:1,5$, бидејќи $1,2:0,4=3$ и $4,5:1,5=3$.♦

Секоја пропорција се состои од четири члена, кои од лево на десно се нарекуваат прв, втор, трет и четврти член на пропорцијата. Првиот и четвртиот член на пропорцијата се викаат **надворешни членови** на пропорцијата, додека вториот и третиот член се викаат **внатрешни членови** на пропорцијата.

Пример 3. Во пропорцијата $3:15=5:25$ броевите 3 и 25 се надворешни членови, додека броевите 15 и 5 се внатрешни членови. ♦

Својства на пропорциите

Во продолќение ќе дадеме неколку својства на пропорциите.

1. (Основно својство на пропорциите) Производот на надворешните членови на една пропорција е еднаков на производот на внатрешните членови на пропорцијата.

Пример 4. Во пропорцијата $7:21=2:6$ важи $7\cdot 6=42=21\cdot 2$. ♦

2. Ако производот на два броја различни од нула е еднаков на производот на други два броја, тогаш од тие четири броја може да се состави пропорција.

Пример 5. Од броевите 2, 3, 6 и 9 може да се состави пропорција, бидејќи $2\cdot 9=3\cdot 6$. Пропорцијата ќе гласи $2:3=6:9$. ♦

3. Една пропорција останува вистинита, ако еден надворешен и еден внатрешен член, или сите нејзини членови се помножат или поделат со еден ист број различен од нула.

Последново својство се користи за упростување на пропорциите и тоа: кога некои од членовите на пропорцијата се дропки или децимални броеви, или кога еден внатрешен и еден надворешен член или сите членови на пропорцијата имаат заеднички множител.

Под решевање на пропорција се подразбира одредување на непознатиот член во неа, кога се познати останатите три члена.

Задача 1. Најди го непознатиот член во пропорцијата $8:5=x:7,5$.

Решение. Со примена на основното својство на пропорциите имаме

$$5\cdot x=8\cdot 7,5$$

односно $5x=60$, од каде следува дека $x=12$. ♦

Дефиниција. Равенство на три или повеќе размери се нарекува **продолжена пропорција**, односно

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

Продолжените пропорции често се запишуваат и на следниов покус начин:

$$a_1:a_2:\cdots:a_n=b_1:b_2:\cdots:b_n$$

4. Збирот на сите први членови на размерите кај продолжената пропорција спрема збирот на сите втори членови се однесуваат исто како и кој и да било прв член спрема неговиот соодветен втор член, односно за продолжената пропорција $a_1:b_1=a_2:b_2=\cdots=a_n:b_n$ важи

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

Пример. Од продолжената пропорција $10:6:4=15:9:6$ добиваме неколку пропорциите меѓу кои

$(10+6+4):(15+9+6)=10:15$, односно $20:30=10:15$

$(10-6+4):(15-9+6)=6:9$, односно $8:12=6:9$

$(10+6-4):(15+9-6)=4:6$, односно $12:18=4:6$ ♦

Задача 2. Најди ги x и y од продолжената пропорција $x:4=6:y=3:2$.

Решение. Од продолжената пропорција ќе составиме две пропорции, со по една непозната

$$x:4=3:2 \text{ и } 6:y=3:2,$$

од каде што наоѓаме дека $x=6$ и $y=4$.♦

Задача 3. Состави продолжена пропорција од пропорциите

$$a:b=4:3,\ b:c=3:8 \text{ и } c:d=4:5.$$

Решение. Од $c:d=4:5$ наоѓаме дека $c:d=8:10$, па продолжената пропорција ќе гласи $a:b:c:d=4:3:8:10$. ♦

Задача 4. Бројот 450 раздели го на делови коишто се однесуваат како $2:3:5:8$.

Решение. Деловите ќе ги изразиме со $2k, 3k, 5k$ и $8k$, каде што k е коефициент на пропорционалност. Од $2k+3k+5k+8k=450$, добиваме $k=25$, односно бараните делови се $2\cdot25=50$, $3\cdot25=75$, $5\cdot25=125$ и $8\cdot25=200$. ♦

Задачи

1. Испитај ја точноста на пропорциите:

а) $3:5=12:20$ **б)** $4:5=\frac{1}{5}:\frac{1}{4}$ **в)** $x^2:y^2=xy:\frac{y^3}{x}$

2. Определи го непознатиот број x во пропорциите:

а) $3x:8=9:5$ **б)** $12:(x+1)=3:4$ **в)** $3:4=(7-x):(7+x)$

3. Определи ги непознатите членови во пропорцијата

$$2:3=x:6=8:y=z:18$$

4. Состави продолжена пропорција од пропорциите:

$$a:b=2:3,\ b:c=6:5 \text{ и } c:d=15:11$$

5. Бројот 600 раздели го на делови кои се однесуваат како $1:3:6$.

4.2. Права и обратна пропорционалност

Права пропорционалност

Една од најчесто среќаваните зависности меѓу две променливи величини е таканаречената права пропорционална зависност на величините.

Дефиниција. Велиме дека две променливи величини A и B се наоѓаат во **права пропорционална зависност** ако размерот на кои било две произволни допуштени вредности од едната величина е еднаков на размерот на соодветните вредности од другата величина.

Пример 1. Ако 1 килограм јаболка чини 30 денари колку ќе чинат 2, 3, 4, 5, ... килограми јаболка прегледно е претставено со табелата:

Количество јаболка во килограми	1	2	3	4	5	6	7	...
Вредност во денари	30	60	90	120	150	180	210	...

Од табелата заклучуваме дека $1:2=30:60$, $2:3=60:90$, $3:4=90:120$ итн. Имено, кога едната величина (количеството) ќе се зголеми за 2, 3, 4, 5, ... пати, тогаш другата величина (вредноста на стоката) ќе се зголеми исто толку пати и обратно. ♦

Величините меѓу кои постои права пропорционална зависност се викаат **право пропорционални величини**.

Пример 2. Право пропорционални величини се: должината на кружната линија и нејзиниот радиус; периметарот на квадратот и неговата страна; тежината и волуменот на едно тело при постојана температура; бројот на работници и извршената работа од нив итн. ♦

Нека X и Y се две право пропрционални величини. Ако $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ се неколку произволни допуштени вредности на величината X, а $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ се соодветните вредности на величината Y, тогаш количникот на соодветните вредности е константен број, односно имаме дека

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\cdots=\frac{y_n}{x_n}=k.$$

Бројот k се нарекува **коефициент на пропорционалност** на право пропорционалните величини X и Y.

Обратна пропорционалност

Дефиниција. Велиме дека две променливи величини А и В се наоѓаат во **обратна пропорционална зависност** ако размерот на кои било две произволни допуштени вредности од едната величина е еднаков на обратниот размер на соодветните вредности од другата величина.

Пример 3. Нека растојанието меѓу два града е $120km$. Тоа може да се измине за различно време во зависност од брзината на движењето. За да ја испитаме зависноста помежу брзината и времето потребно за изминување на патот, ќе ја составиме следната табела:

Брзина во километри на час	5	10	15	20	30	60	120	...
Време во часови	24	12	8	6	4	2	1	...
Пат во километри	120	120	120	120	120	120	120	...

Од табелата заклучуваме дека $5:10=12:24$, $5:15=8:24$, $5:30=4:24$ итн., односно $5\cdot 24=10\cdot 12=15\cdot 8=20\cdot 6=30\cdot 4=\ldots=120\cdot 1=120$. Имено, кога едната величина (брзината) ќе се зголеми за 2, 3, 4, 5, ... пати, тогаш другата величина (времето) ќе се намали исто толку пати и обратно. ♦

Величините меѓу кои постои обратна пропорционална зависност се викаат **обратно пропорционални величини**.

Пример 4. Обратно пропорционални величини се: притисокот и волуменот на одредено количество гас при постојана температура; должината и ширината на правоаголникот, при постојана плоштина; број на работници и времето за кое тие завршуваат определена работа итн. ♦

Нека X и Y се две обратно пропрционални величини. Ако $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ се неколку допуштени вредности на величината X, а $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ се соодветните вредности на величината Y, тогаш производот на соодветните вредности е константен број, односно имаме дека

$$y_1 x_1 = y_2 x_2 = \cdots = y_n x_n = k.$$

Бројот k се нарекува **коефициент на пропорционалност** на обратно пропорционалните величини X и Y.

Задачи

1. Во каква зависност се наоѓаат следниве величини:

а) тежината и волуменот на телата кои се од иста материја

б) брзината на движењето и времето за кое возилото изминува ист пат

в) периметарот и страната на рамнострани триаголници

г) број на работници и времето во кое тие завршуваат определена работа?

2. Во каква зависност се наоѓаат периметарот и страната на еден правилен шестаголник? Кој е коефициентот на пропорционалност?

3. Дали плоштината на квадратот е право пропорционална со должината на неговата страна?

4. Каква е зависност помеѓу соодветните страни на слични триаголници?

5. Каква е зависност на брзината со која една цевка полни базен (мерена во литри во минута) и времето на полнење на базенот (мерено во минути)? Колку е е коефициентот на пропорционалност?

4.3. Просто и сложено тројно правило

Просто тројно правило

Својствата на пропорциите и пропорционалните величини наоѓаат голема примена во решавањето на задачи од секојдневниот живот. Во ваквите задачи е дадена вредноста на една величина А и соодветната вредност на друга величина В, со која величината А е право пропорционална или обратно пропорционална, и се бара да се најде онаа вредност на едната од величините што соодветствува на познатата вредност на другата величина. Задачите од ваков вид се викаат задачи од **просто тројно правило**.

Задача 1. Една земјоделска задруга од $4ha$ набрала 68 тони грозје. Задругата имала вкупно $15ha$ лозје со род. Колку тони грозје набрала?

Решение. Во задачата се појавуваат две величини: плоштината на лозјето и набраното количество грозје. Бидејќи количеството грозје е право пропорционално на плоштината на лозјето, односот на плоштините на лозовите насади ќе биде еднаков на односот на соодветно набраните количества грозје од нив. Ако бараното количество грозје го означиме со x, можеме да ја составиме пропорцијата:

$$4:15=68:x$$

од каде што следува дека

$$x=\frac{68\cdot 15}{4}=255 \text{ тони.}$$

Погорната постапка може да запише прегледно на следниов начин:

↑	од $4ha$	↑	$68t$ грозје
	од $15ha$		xt грозје

Имаме дека $x:68=15:4$, $x=68\frac{15}{4}=255$ тони, од каде што заклучуваме дека од $15ha$ лозје задругата може да набере 255 тони грозје. ♦

Да забележиме дека едната стрелка секогаш започнува од x и е насочена нагоре, другата стрелка ја насочуваме нагоре, ако двете величини се право пропорционални, или надолу ако двете величини се обратно пропорционални една на друга.

Задача 2. Од некое количество преѓа може да се исткае $92m$ платно широко $140cm$. Колку метри платно ќе се исткае од истото количество преѓа, ако платното е широко $80cm$?

Решение. Двете величини: должината и ширината на платното што може да се исткае од истото количество преѓа, се обратно пропорционални една на друга. Затоа односот на кои и да било две вредности од едната величина ќе биде еднаков на обратниот однос од соодветните вредности на другата величина, односно

$$x:92=140:80$$

од каде што следува дека

$$x=\frac{92\cdot 140}{80}=161 \text{ метар.}$$

Погорната постапка може да запише прегледно на следниов начин:

↑	$92m$ платно ако е		$140cm$ широко
	xm платно ако е	↓	$80cm$ широко

Имаме дека $x:92=140:80$, $x=92\frac{140}{80}=161$ метар, од каде што заклучуваме дека од истото количество преѓа ќе се исткаат $161m$ платно широко $80cm$. ♦

Сложено тројно правило

Во практиката често пати наидуваме на задачи со три или повеќе пропорционални величини. Имено, ако се дадени вредности на три и повеќе величини, тогаш соодветната непозната вредност се одредува со **сложено тројно правило**.

Задача 3. За изведување на тунел долг $1600m$, широк $4m$ и висок $6m$ се потрошени 640000 евра. Колку евра се потребни за изведување на тунел долг $1000m$, широк $6m$ и висок $8m$, при истите услови за изведување?

Решение. Сите величини: должината, ширината, висината и потрошувачката за изведување на тунелот, се право пропорционални една на друга, па затоа сите стрелки се исто насочени. Односот на кои и да било две вредности од една величина е еднаков на однос од соодветните вредности на другите величина, односно

$$\begin{aligned} x:640000&=1000:1600\\ &=6:4\\ &=8:6 \end{aligned}$$

од каде што следува дека

$$x:640000=(1000\cdot 6\cdot 8):(1600\cdot 4\cdot 6)$$

$$x=\frac{640000\cdot(1000\cdot 6\cdot 8)}{1600\cdot 4\cdot 6}$$

$$x=800000 \text{ евра}$$

Погорната постапка може да запише прегледно на следниов начин:

↑	$1600m$ долг	↑	$4m$ широк	↑	$6m$ висок	↑	640000 евра
	$1000m$ долг		$6m$ широк		$8m$ висок		x евра

од каде што заклучуваме дека за изведување на тунел долг $1000m$, широк $6m$ и висок $8m$, при истите услови за изведување, потребни се 800000 евра. ♦

Задача 4. Група 20 работници работеле 5 дена по 8 часа и набрале 20000 килограми праски. Колку дена се потребни за група од 30 работници кои ќе работат по 5 часа на ден, да наберат 60000 килограми праски?

Решение. Првата поставена стрелка секогаш започнува од x и е насочена нагоре, а потоа согледуваме дека ако 20 работници ја завршиле работата за 5 дена, тогаш 30 работници ќе ја завршат работа за помалку денови (обратно пропорционални величини). Понатаму, ако работат по 8 часа, работата ќе ја завршат за 5 дена, а ако работат по 5 часа работата ќе ја завршат за повеќе денови (обратно пропорционални величини). И на крај, ако 20000 килограми праски се набрани за 5 дена, тогаш 60000 килограми праски ќе се наберат за повеќе денови (право пропорционални величини).

↓	20 работници	↑	5 дена	↓	8 часа	↑	20000 килограми
	30 работници		x дена		5 часа		60000 килограми

Според насоката на стрелките ги имаме пропорциите

$$\begin{aligned} x:5&=20:30\\ &=8:5\\ &=60000:20000 \end{aligned}$$

од каде што следува дека

$$x = \frac{5 \cdot 20 \cdot 8 \cdot 60000}{30 \cdot 5 \cdot 20000} = 16 \text{ дена}$$

Значи, потребни се 16 дена, за група од 30 работници кои ќе работат по 5 часа на ден, да наберат 60000 килограми праски. ♦

Задачи

1. Во текот на работниот ден 4 работници ископале канал долг 12 метри. Колку работници се потребни за да се ископа канал долг 18 метри во текот на работниот ден?

2. Од 20 килограми шеќерна репка се добиваат 1,5 килограми шеќер. Колку килограми шеќер ќе се добие од 768 килограми шеќерна репка?

3. Шест еднакви цевки наполнуваат еден базен за 4,5 часа. За колку часа ќе го наполнат истиот базен 5 такви цевки?

4. Шест работници може да завршат определена работа за 10 денови, ако работат по 8 часа дневно. За колку денови 10 работници ќе ја завршат истата работа ако работат 12 часа дневно?

5. Шест машини со моќност $1200kW$ може да завршат определена работа за 8 денови. Со каква моќност треба да бидат машините за да може 4 машини да ја завршат истата работа за 6 денови?

4.4. Процентна сметка

Процентна сметка од сто

Во практиката е вообичаено разни успеси и неуспеси, порастот или опаѓањето на цените на стоките, или производството да се искажуваат со специјални видови размери.

Дефиниција. Размер од облик $a:100$ се вика **процент**, и се означува со $a\%$.

Бидејќи процентот е пред се размер сите својства на размерот се пренесуваат и на процентот.

Пример 1. На училишен натпревар по математика Ина точно одговорила на 17 прашања од вкупно поставените 25 прашања. На истиот натпревар Мирко дал точен одговор на 13 прашања од вкупно поставените 20 прашања. Се поставува прашањето кој од натпреварувачите бил поуспешен?

Ина одговорила точно 17 прашања од вкупно 25 прашања. Резултатот може да го изразиме со размерот 17:25. Аналогно, резултатот на Мирко кој се состои од 13 одговорени прашања од вкупно 20 може да го изразиме со размерот 13:20. Сега, одговорот на поставеното прашање се сведува на заклучокот дали размерот 17:25 е поголем или помал од размерот 13:17? Да ги составиме следните пропорции:

Ина: $17:25 = x:100$, од каде што следува дека $x = 68$.

Мирко: $13:20 = y:100$, од каде што следува дека $y = 65$.

Споед тоа, резултатот на Ина од 17:25 е еквивалентен со 68:100, додека резултатот на Мирко од 13:20 еквивалентен со 65:100. Може да заклучиме дека Ина покажала подобар резултат на тестот бидејќи точно одговорила на 68% од поставените прашања за разлика од Мирко кој одговорил точно на 65% од поставените прашања. ♦

Како што забележуваме од примерот, как процентната сметка се среќаваат:

- константа 100,
- главна вредност (S),
- процент (p), и
- процентен ознос (P),

кои се поврзани со пропорцијата $P:S = p:100$. Ако се познати две од вредностите во погорната пропорција, тогаш може да ја пресметаме третата вредност со помош на една од формулите:

$$P = \frac{S \cdot p}{100}, \quad S = \frac{100 \cdot P}{p}, \quad p = \frac{100 \cdot P}{S}.$$

Пресметувањето на една од овие три величини се нарекува **процентна сметка од сто**.

Задача 1. Ирина имала 500 денари. За колку денари се зголемило нејзиното салдо, ако на лотарија добила 12% од вкупната сума што ја имала?

Решение. Дадено е главната вредност $S = 500$ и процентот $p = 12$, а се бара да се определи процентниот износ P. Според погорната формула имаме

$$P = \frac{S \cdot p}{100} = \frac{500 \cdot 12}{100} = 60,$$

односно салдото на Ирина се зголемило за 60 денари.

Задача 2. Цената на пар чевли е зголемена за 12%. Покачувањето на цената на чевлите изнесува 840 денари. Колкава била цената на чевлите пред покачувањето?

Решение. Дадени се процентниот износ $P = 840$ и процентот $p = 12$, а се бара да се определи главната вредност S. Според погорната формула имаме

$$S = \frac{100 \cdot P}{p} = \frac{100 \cdot 840}{12} = 7000,$$

односно цената на чевлите пред покачувањето била 7000 денари. ♦

Задача 3. Компанија откупила 30 тони овошје во амбалажа од 3 тони. Колкав процентот на амбалажата?

Решение. Дадено е главната вредност $S = 30$ процентниот износ $P = 3$, а се бара да се определи процентот p. Според погорната формула имаме

$$p = \frac{100 \cdot P}{S} = \frac{100 \cdot 3}{30} = 10,$$

односно $p = 10\%$. ♦

Процентна сметка под сто и процентна сметка над сто

Во практиката често се среќаваме со задачи во кои главната вредност е зголемена или намалена за процентниот износ $S \pm P$, а треба да се пресмета главната вредност. Во тој случај, ако е дадено $S + P$ велиме дека имаме **процентна**

сметка над сто, или ако е дадено $S-P$ велиме дека имаме **процентна сметка под сто.**

За наоѓање на S и P ќе појдеме од основната пропорција $S:P=100:p$, од каде што добиваме дека

$$(S\pm P):P=(100\pm p):p, \text{ односно}$$

$$(S\pm P):(100\pm p)=P:p=S:100,$$

од каде што ги добиваме формулите

$$S=\frac{(S\pm P)\cdot 100}{100\pm p} \quad \text{и} \quad P=\frac{(S\pm P)\cdot p}{100\pm p}$$

Задача 4. Во една работилница се изработени 1800 ракотворби и со тоа нормата е зголемена за 20%.

а) Колкава е нормата на ракотворби?

б) За колку ракотворби е натфрлена нормата?

Решение. Дадени се збирот $S+P=1800$ и процентот $p=20,$ а се бара да се определат главната вредност S и процентниот износ $P.$ Според погорната формула имаме

$$\text{а) } S=\frac{(S+P)\cdot 100}{100+p}=\frac{1800\cdot 100}{100+20}=1500, \text{ и}$$

$$\text{б) } P=(S+P)-S=1800-1500=300$$

Добивме дека нормата изнесува 1500 ракотворби, и е натфрлена за 300 ракотворби. ♦

Задача 5. Во период на летна распродажба цената на една кошула е намалена за 12% и намалената цена изнесува 1276 денари.

а) Колкава била првобитната цена на кошулата?

б) Колку изнесува загубата?

Решение. Дадени се разликата $S-P=1276$ и процентот $p=12,$ а се бара да се определат главната вредност S и процентниот износ $P.$ Според погорната формула имаме

$$\text{а) } S=\frac{(S-P)\cdot 100}{100-p}=\frac{1276\cdot 100}{100-12}=1450, \text{ и}$$

$$\text{б) } P=S-(S-P)=1450-1276=174$$

Според тоа, цената на кошулата пред намалувањето била 1450 денари, а загубата изнесува 174 денари. ♦

Задачи

1. Пресметај:

а) 15% од 750 километри **б)** 12% од 6000 денари

2. Цената конзерва грашок е намалена од 40 денари на 34 денари. За колку проценти е намалена цената?

3. Во една паралелка 7 ученици се одлични, што претставува 20% од вкупниот број на ученици. Колку вкупно ученици има во паралелката?

4. При прием на стока од 23 тони констатирано е 0,5% оштетување при транспорт. Колку килограми стока е оштетено?

5. Цената на некоја стока е намалена за 15%, а потоа така добиената цена е зголемена за 5%, и добиена е цена од 1606 денари. Колкава била цената на стоката пред намалувањето?

4.5. Делбена сметка

Друг вид задачи кои се решаваат со својствата на пропорциите се задачите од **делбена сметка**. Тоа се задачи во кои дадена величина или множество треба да е раздели на делови, право пропорционални или обратно пропорционални на однапред зададени броеви. Затоа делбата може да се врши **право пропорционално** или **обратно пропорционално**.

Во продолжение решиме задача во којашто имаме право пропорционално делење.

Задача 1. Раздели го бројот 370 на три дела, кои што ќе бидат право пропорционални на броевите 2, 3 и 5.

Решение. Бројот 370 треба да се раздели на три дела (собироци) така што првиот дел да се однесува спрема вториот дел како $2:3$, а првиот спрема третиот како $2:5$. Ако бараните три дела соодветно ги означиме со x, y и z, тогаш добиваме дека

$$x:y=2:3, \quad y:z=3:5 \text{ и } x:z=2:5.$$

Од овие пропорции ја добиваме продолжената пропорција

$$x:y:z=2:3:5, \text{ односно } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}.$$

Оттука, согласно својството а продолжените пропорции имаме дека

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{2+3+5}=\frac{370}{10}$$

од каде што наоѓаме дека

$$\frac{x}{2}=\frac{370}{10}, \quad \frac{y}{3}=\frac{370}{10} \text{ и } \frac{z}{5}=\frac{370}{10},$$

од каде што непосредно заклучуваме дека $x=74$, $y=111$ и $z=185$. ♦

Следната задача се однесува на обратно пропорционално делење.

Задача 2. Андреј, Јана и Иван се на возраст од 5, 8 и 12 години. Тие ја поделиле сумата од 122500 денари обратно пропорционално на нивната возраст. По колку денари добил секој од нив?

Решение. Сумата од 122500 денари треба да се раздели на три дела x, y и z така што

$$x:y:z=\frac{1}{5}:\frac{1}{8}:\frac{1}{12}, \text{ односно } x:y:z=24:15:10.$$

Оттука, согласно својството а продолжените пропорции имаме дека

$$\frac{x}{24}=\frac{y}{15}=\frac{z}{10}=\frac{x+y+z}{24+15+10}=\frac{122500}{49}=2500,$$

од каде што наоѓаме дека

$$\frac{x}{24}=2500, \quad \frac{y}{15}=2500 \text{ и } \frac{z}{10}=2500,$$

од каде што непосредно заклучуваме дека $x=60000$, $y=37500$ и $z=25000$. ♦

Задачи

1. Раздели го бројот 1860 на три дела, кои се
а) право пропрционални на броевите 2, 3 и 5
б) обратно пропорционални на броевите 2, 3 и 5.

2. Раздели го бројот 1080 на три дела, кои се однесуваат како $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$.

3. Сумата од 27200 денари да се подели на три лица право пропорционално на нивната возраст која изнесува 20 години, 32 години и 40 години. По колку денари ќе добие секој од нив?

4. Сумата од 1092000 денари да се подели на три компании, така што секоја следна компанија ќе добие 20% повеќе од претходната. По колку денари ќе добие секоја компанија?

5. Сумата од 135500 денари да се подели на три лица, така што секое следно лице ќе добие 10% помалку од претходното. По колку денари ќе добие секое лице?

4.6. Каматна сметка

Позајмувањето пари е нужна трансакција со која често се среќаваме во секојдневниот живот. Заемопримачот може да ги искористи парите за да оствари добивка која што заемодавачот не е во можност да ја оствари, додека тој за сметка на тоа добива надомест за позајмените пари, наречен **камата**. Банките плаќаат камата на физички лица и компании кои своите пари ги депонираат на банкарските сметки, и обратно тие плаќаат камати на банките кога од нив позајмуваат определена сума пари.

Висината на позајмената сума пари, односно сумата на која се плаќа каматата се нарекува **главнина.**

Периодот за кој треба да се врати позајмената сума пари се нарекува **времетраење на заемот.** Вообичаено е овој период да се мери во единиците денови, месеци или години.

Висината на каматата што се остварува за единица време е пропорционална со главнината, односно претставува некој процент од главнината, и се нарекува **каматна стапка**. Според тоа, каматната стапка е процентната стапка сврзана за определен временски период. Затоа, висината на каматата не зависи само од главнината, туку и од времетраењето на заемот.

Да ја означиме каматата со K, главнината со G, времетраењето на заемот со t и каматната стапка со s.

Пример 1. Миле му позајмил на Сашо 120 денари. Притоа се договориле Сашо да го врати заемот за 6 месеци, и за надомест да му исплаќа на Миле на крајот од секој месец износ од 15% од главнината.

Во случајот главнината $G=120$ денари, времетраењето на заемот $t=6$ месеци и месечната каматна стапка е $s=15\%$. Сашо на Миле треба да му исплаќа секој месец 15% од 120 денари, односно по 18 денари. Тоа значи дека за време од 6 месеци Миле ќе добие камата од $18\cdot 6=108$ денари. ♦

Според тоа, за каматата K што се остварува од главнината G за времетраење на заемот t, при каматна стапка s имаме

$$K = s \cdot G \cdot t.$$

Да забележиме дека при пресметување на камата времетраењето на заемот треба да биде изразено во истата единица во однос на која е определена каматната стапка.

Задача 1. Во една банка висината на годишната каматна стапка е 12%. Колкав ќе биде износот на каматата што треба да се исплати за штеден влог од 5000 денари по истекот на три години?

Решение. Според условот во задачата главнината е $G = 5000$ денари, годишната каматна стапка е $s = 12\%$, а времетраењето на заемот е $t = 3$ години. Тогаш за остварената камата на депонираниот влог имаме

$$K = s \cdot G \cdot t = 0{,}12 \cdot 5000 \cdot 3 = 1800 \text{ денари. } \blacklozenge$$

Задачи

1. Една компанија вложила 3000 евра со годишна каматна стапка од 12%.

а) Колку камата добила компанијата во првата година?

б) Колку камата добила компанијата во втората година?

в) Колку камата добила компанијата по истекот на третата година?

2. Славица и Лиле имале по 10000 денари. Славица ги вложила своите пари со годишна каматна стапка од 11% за 3 години, додека Лиле гио вложила своите пари со годишна каматна стапка од 8% за 4 години.

а) Колку камата добила Славица?

б) Колку камата добила Лиле?

в) Која од нив добила повисока камата по истекот на времето?

3. Виктор вложил во банка 3000 денари и за 3 години добил камата од 675 денари. Определи ја годишната каматна стапка.

4. Дејан одлучил да инвестира определена сума пари за да добива на крајот од секоја година по 5000 денари. Колку пари треба да инвестира, ако годишната каматна стапка е 13%?

5. Сузана заработила од својата инвестиција сума од 7000 денари за 3 години. Колку пари инвестирала, ако годишната каматна стапка била 14,25%?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Упрости ги размерите:

а) $18:72$ **б)** $6\frac{2}{3}:16\frac{2}{3}$ **в)** $5\frac{1}{3}:8\frac{1}{2}$ **г)** $16a:48ab$

2. Парцелите A и B се во форма на правоаголник. Ако димензиите на парцелата A се $80m$ и $60m$, а на парцелата B се $90m$ и $50m$, најди го размерот на нивните плоштини.

3. Определи го непознатиот број x во пропорциите:

а) $(15-x):x=3:2$ **б)** $8:(5+x)=3:x$ **в)** $a:b=(a+x):x$

4. Бројот 160 раздели го на четири делови кои се однесуваат како $2:5:7:6$.

5. Цената на чинење на 80 автобуски билети е 640 денари. Колку денари чинат 60 билети?

6. Еден шумски работник за 9 дена исекол 486 кубни метри дрва. Колку кубни метри дрва ќе исече за 16 дена?

7. Девет работника завршиле една работа за 30 дена. Колку работника треба се ангажираат за да се заврши истата работа за 10 дена?

8. Пешакот А движејќи се со брзина од 3 километри на час, патот од еден град до друг го минува за 4 часа. За колку време пешакот В ќе го помине истиот пат ако тој се движи со брзина од 8 километри на час?

9. Во една компанија 8 работника за 13 дена заработиле 6240 денари. Колку денари ќе заработат 15 работници за 6 дена ако работат под истите услови?

10. Во еден рудник 10 рудари за 8 часа ископале 40 тони јаглен. Колку тони јаглен ќе ископаат 8 рудари за 6 часа ако работат под истите услови?

11. Пат долг $6km$, широк $3m$, со висина на насип $60cm$, може да го изведат 80 работници за 45 дена ако работат 6 часа дневно. За колку дена 120 работници ќе изведат пат долг $10km$, широк $6m$, со висина на насип $80cm$, ако работат 8 часа дневно?

12. Дана планирала да продаде 24 кроасани. Ако таа продала 13 кроасани, кој процент од кроасаните останале непродадени?

13. Во еден супермаркет секоја среда има намаление од 15% на прехрамбените артикли. Колку пари ќе заштеди Марија, ако таа купи артикал кој чини 102 денари?

14. Годишниот наталитет во една држава е 0,3%. Определи го бројот на жители во државата, ако се знае дека таа пред 3 години броела 40 милиони жители?

15. За време на сезонско намаление од 15% Никола купил чевли по цена од 520 денари. Колку изнесувала првобитната цена на чевлите?

16. На 5 продавници треба да се разделат 2480 литри млеко. Колку литри млеко ќе добие секоја продавница, ако првата има 600 потрошувачи, втората има 800 потрошувачи, третата има 440 потрошувачи, а четвртата и петтата секоја по 320 потрошувачи?

17. Која сума треба да се подели на 3 лица на следниов начин: првото лице да добие $\frac{1}{4}$ од сумата, второто лице да добие $\frac{2}{5}$ од сумата, а третото лице да добие 126000 денари?

18. Сандра вложила 25000 денари во времетраење од 2 години и 6 месеци и при тоа добила камата од 11562,5 денари. Најди ја висината на годишната каматна стапка?

19. Колку камата добила Ивана за штеден влог во висина од 7000 денари со годишна каматна стапка од 12,25% за времетраење од 3 години?

20. Јован инвестирал 10500 денари за 3 години и 3 месеци со годишна каматна стапка од 13,2%.

а) Колку изнесува висината на каматата што ја добил?

б) Колку вкупно пари имал по истекот на времетраењето на инвестицијата?

5. ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ, НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

5.1. Линеарна равенка со една непозната

Видови равенки

Два рационални изрази сврзани со знакот „=“ (еднакво), сочинуваат **равенство.** Кај секое равенство разликуваме две страни: лева и десна страна.

Ако два изрази во равенството се бројни изрази, тогаш равенството се нарекува **бројно равенство**. Бројните равенства се искази запишани со математички симболи, па според тоа тие може да бидат вистинити (точни) или невистинити (неточни).

Равенство во кое барем еден од двата изрази има една или повеќе променливи се нарекува **равенка**. Променливите во равенката се нарекуваат **непознати**, и вообичаено се означуваат со x, y,... Множеството допуштени вредности на непознатите се вика **дефиниционо множество** на равенката и се означува со D.

Пример 1. а) Равенството $3+2=10-5$ е бројно равенство, кое е вистинито.

б) Равенството $5x+3=2$ е равенка со $D=\mathbb{R}$. ♦

Секоја равенка преминува во бројно равенство со задавање на вредности на непознатите од дефиниционото множество.

Пример 2. Равенката $7+3x=2$ за $x=2$ преминува во бројното равенство $7+3\cdot 2=2$. Притоа ова равенство е невистинито. ♦

Равенка која со замена на непознатите за сите вредности од дефиниционото множество преминува во вистинито бројно равенство се нарекува **идентитет**.

Равенка која со замена на непознатите за сите вредности од дефиниционото множество преминува во невистинито бројно равенство се нарекува **невозможна равенка**.

Пример 3. Равенката $6+3x=3(2+x)$ е идентитет, додека равенката $7+3x=2+3x$ е невозможна равенка. ♦

Еквивалентни равенки

Две равенки се нарекуваат **еквивалентни** ако имаат исто дефиниционо множество и исто множество решенија.

Пример 4. Равенките $2+x=5$ и $x-3=0$ се еквивалентни бидејќи имаат дефиниционо множество $\mathbb{R}$ и множество решенија $R=\{3\}$. ♦

За да решиме дадена равенка, истата ја заменуваме со друга поедноставна но еквивалентна на неа. Потоа, таа равенка ја заменуваме со трета поедноставна еквивалентна на неа, итн., се додека не дојдеме до равенка чии решенија се очевидни. Заменувањето на дадена равенка со друга поедноставна равенка еквивалентна на неа нарекува трансформација на равенката и се заснова на следниве две својства на еквивалентните равенки.

1. Равенката

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

е еквивалентна на равенката

$$f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x),$$

каде $\varphi(x)$ е израз кој е дефиниран за сите допуштени вредности на непознатата x во равенката (1).

Со други зборови, ако кон двете страни на равенката додадеме еден ист израз, кој е дефиниран за сите допуштени вредности на непознатата, ќе добиеме равенка еквивалентна на дадената. Како последица од погорното својство имаме дека:

- Ако двете страни на равенката имаат еднакви членови со исти знаци, тие може да се поништат (изостават).
- Секој член на равенката може да се пренесе од едната страна на равенката на другата страна, и притоа неговиот знак се менува во спротивен.

Пример 5. а) Од равенката $7x - 3x + 2 = 9 - 3x$ со поништување на еднаквите членови се добива равенката $7x + 2 = 9$ која е еквивалентната на појдовната.

б) Кај равенката $5x - 4 = 2x + 5$ сакаме на левата страна да ги групираме членовите што ја содржат непознатата. За таа цел членот $2x$ може да го пренесеме на левата страна на равенката, пришто неговиот знак ќе се промени во спротивен. Исто така членот -4 може да го пренесе на десната страна од равенката, пришто неговиот знак ќе се промени во спротивен. Така ја добиваме равенката $5x - 2x = 5 + 4$ која е еквивалентна на дадената равенка. ♦

2. Равенката

$$f(x) = g(x) \qquad (2)$$

е еквивалентна на равенката

$$f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x),$$

каде $\varphi(x)$ е израз кој е дефиниран и различен од нула за сите допуштени вредности на непознатата x во равенката (2).

Со други зборови, ако двете страни на равенката ги помножиме со еден ист израз, кој е дефиниран и различен од нула за сите допуштени вредности на непознатата, ќе добиеме равенка еквивалентна на дадената. Како последица од погорното својство имаме дека:

- Знаците на сите членови на равенката се менуваат во спротивни, ако двете страни на равенката се помножат со -1.
- Ако двете страни на равенката имаат заеднички множител, којшто не ја содржи непознатата и е различен од нула, тогаш со него може да се поделат двете страни на равенката. Во тој случај велиме дека равенката ја скратуваме.

Пример 6. а) Ако двете страни на равенката $-3x + 7 = 3$ ги помножиме со -1 ја добиваме равенката $3x - 7 = -3$ која е е еквивалентната на појдовната равенка.

б) Равенката $2x - 4 = 6$ е еквивалентна со равенката $x - 2 = 3$. Двете страни на равенката се поделени со 2, односно помножени со $\frac{1}{2}$. ♦

Да забележиме дека со примена на погорното својство, равенка со дробни коефициенти може да се трансформира во равенка со цели коефициенти, ако сите членови на равенката се помножат со некој заеднички содржател на именителите. Ваквата трансформација се нарекува ослободување на равенката од именители.

Пример 7. Равенката

$$\frac{x-1}{2}-5=\frac{x+2}{3}$$

ќе се ослободи од именителите, ако секој нејзин член се помножи со некој заеднички содржател на именителите, на пример, $2\cdot 3=6.$ Така, дадената равенка е еквивалентна на равенката $6\cdot\frac{x-1}{2}-6\cdot 5=6\cdot\frac{x+2}{3},$ односно на равенката

$$3(x-1)-30=2(x+2).$$ ♦

Ако равенка ја содржи непознатата во именителот, тогаш по ослободување на равенката од именителите може да се добие равенка која ги содржи сите решенија на дадената, но патем таа може да придобие други решенија, за кои НЗС на именителите се анулира. Ако има такви решенија, тие треба да се исклучат од множеството решенија.

Пример 8. Равенката

$$\frac{x^2-4x}{x-2}=-\frac{4}{x-2}-4$$

ќе се ослободи од именителите, ако секој нејзин член се помножи изразот $x-2,$ за кој претпоставуваме дека е различен од нула. Значи, при услов $x-2\neq 0$ ја добиваме равенката $x^2-4x=-4-4x+8,$ која е еквивалентна на равенката $x^2-4=0,$ односно $(x-2)(x+2)=0,$ чии решенија се $x=2$ и $x=-2.$ Решението $x=-2$ е решение на дадената равенка, но решението $x=2$ не е решение на дадената равенка бидејќи за таа вредност $x-2=0.$ Според тоа дадената равенка има само едно решение $x=-2.$ ♦

Задачи

1. Дали следниве равенки се еквивалентни:

а) $x^2+3x=12+x^2$ и $3x=12$ **б)** $3=\frac{15}{x}$ и $3x=15$ **в)** $x+\frac{1}{x}=5+\frac{1}{x}$ и $x=5$?

2. За која вредност на x бројната вредност на изразот $5x-2$ е еднаква на:

а) 8 **б)** 7 **в)** 0 **г)** 6?

3. За која вредност на x изразите $3x-2$ и $4x+1$ имаат еднакви бројни вредности?

4. Кои од следниве равенки се идентитети:

а) $5x-2x=3x$ **б)** $3x-2=x+1$ **в)** $(y+5)^2=y^2+10y+25$?

5.2. Решавање на линеарни равенки и равенки што се сведуваат на линеарни равенки со една непозната

Општ вид на линеарна равенка со една непозната

Со сите погорни трансформации секоја линеарна равенка со една непозната се сведува на линеарна равенка од видот

$$ax+b=0, \qquad (1)$$

каде што a и b се броеви или изрази во кои не се јавува непознатата x. Равенката (1) се нарекува **општ вид на линеарна равенка со една непозната**, каде што a се вика **коефициент** пред непознатата, а b се вика **слободен член**. Да го испитаме нејзиното множество решенија.

1. Ако во равенката $ax+b=0$, коефициентот $a\neq 0$, тогаш таа е еквивалентна со равенката $x=-\frac{b}{a}$, која **има единствено решение** $x_0=-\frac{b}{a}$.

2. Ако во равенката $ax+b=0$, коефициентот $a=0$, додека слободниот член $b\neq 0$, тогаш таа е еквивалентна со равенката $0\cdot x=-b$, која е невозможна бидејќи не постои реален број кој помножен со нула дава број различен од нула. Според тоа во овој случај равенката е **невозможна.**

3. Ако во равенката $ax+b=0$, коефициентот $a=0$, и слободниот член $b=0$, тогаш таа е еквивалентна со равенката $0\cdot x=0$, која има бесконечно многу решенија, бидејќи секој реален број помножен со нула дава нула. Според тоа во овој случај равенката е **идентитет**.

Задача 1. Реши ја равенката

$$\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}=\frac{x+14}{2}-2.$$

Решение. За да се ослободиме од именителите, двете страни на равенката ги множиме со 12, при што ја добиваме равенката

$$12\cdot\frac{5x-2}{3}-12\cdot\frac{x-8}{4}=12\cdot\frac{x+14}{2}-12\cdot 2$$

која по скратувањето добива облик

$$4(5x-2)-3(x-8)=6(x+14)-12\cdot 2.$$

Со ослободување од заградите ја добиваме равенката

$$20x-8-3x+24=6x+84-24.$$

Ако ги групираме сите членови што ја содржат непознатата на левата страна, а сите слободни членови на десната страна, ја добиваме равенката

$$20x-3x-6x=+84-24+8-24,\text{ односно } 11x=44.$$

Со делење на двете страни со добиената равенка со коефициентот пред непознатата, ја добиваме еквивалентната равенка $x=4$, од која непосредно заклучуваме дека решението на равенката е $x_0=4$. ♦

Задача 2. Реши ја равенката

$$\frac{15}{x}-\frac{7-x}{x-2}=1.$$

Решение. За да се ослободиме од именителите, двете страни на равенката ги множиме со производот $x(x-2)$. Под претпоставка дека $x(x-2)\neq 0$, односно $x\neq 0$ и $x\neq 2$, дадената равенка се трансформира во равенката

$$\frac{15x(x-2)}{x}-\frac{(7-x)\cdot x\cdot(x-2)}{x-2}=x(x-2)$$

која по скратувањето добива облик

$$15(x-2)-x(7-x)=x(x-2).$$

Со ослободување од заградите ја добиваме равенката

$$15x-30-7x+x^2=x^2-2x.$$

Потоа, со групирање на члeновите со и без непознатата и со сведување на сличните членови ја добиваме равенката $10x=30$, чие што решение е $x_0=3$. Бидејќи $3\neq 0$ и $3\neq 2$, заклучуваме дека $x_0=3$ е решение на равенката. ♦

Задача 3. Реши ја равенката

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}=\frac{2x}{x^2-4}.$$

Решение. За да се ослободиме од именителите, двете страни на равенката ги множиме со изразот $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Под претпоставка дека $x^2-4\neq 0$, односно $x\neq -2$ и $x\neq 2$, дадената равенка се трансформира во равенката

$$(x-2)-(x+2)=2x$$

чие што решение е $x_0=-2$. Бидејќи $x_0=-2$ не е решение на равенката заклучуваме дека множеството решенија на дадената равенка е празното множество, односно дадената равенка е невозможна. ♦

Задача 4. Реши ја равенката

$$\frac{2x-7}{x-5}=1-\frac{2-x}{x-5}.$$

Решение. За да се ослободиме од именителите, двете страни на равенката ги множиме со изразот $x-5$. Под претпоставка дека $x-5\neq 0$ ја добиваме равенката

$$(2x-7)=x-5-(2-x)$$

која е еквивалентна со равенката $0\cdot x=0$. Последната равенка е идентитет, но решенија на равенката се само оние релани броеви x за кои $x-5\neq 0$. Според тоа, множеството решенија на дадената равенка е $R=\mathbb{R}\setminus\{5\}$. ♦

Равенки со апсолутна вредност кои се сведуваат на линеарни равенки со една непозната

Под апсолутна вредност на реален број x, што се означува $|x|$, се подразбира бројот:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{ако } a>0 \\ 0, & \text{ако } a=0. \\ -a, & \text{ако } a<0 \end{cases}$$

Равенките во кои непознатата x се појавува под знакот за апсолутна вредност ги нарекуваме **равенки со апсолутна вредност**. Од посебен интерес за нас се равенките со апсолутна вредност кои се сведуваат на линеарни равенки со една непозната. Постапката за нивно решавање започнува со ослободување од знакот за апсолутна вредност согласно дефиницијата за апсолтна вредност на реален број. Во продолжение, со помош на еквивалентни трансформации, равенката се сведува на равенка од општ облик, чија што постапка за решавање ја усвоивме во претходниот дел.

Задача 5. Реши ја равенката

$$|x-5|=2$$

Решение. Според дефиницијата за апсолутна вредност на реален број имаме дека

$$|x-5|=\begin{cases} x-5, & x\in[5,\infty) \\ 5-x, & x\in(-\infty,5) \end{cases}.$$

Можни се следниве два случаи:

I. Ако $x\in(-\infty,5)$, тогаш дадената равенка добива облик $5-x=2$. Решението на равенката е $x=3$.

II. Ако $x\in[5,\infty)$, тогаш дадената равенка добива облик $x-5=2$. Решението на равенката е $x=7$.

Конечно, решенија на дадената равенка се $x=3$ и $x=7$. ♦

Задача 6. Реши ја равенката

$$|x|-|x+2|=0$$

Решение. Имаме дека

$$|x|=\begin{cases} x, & x\in[0,\infty) \\ -x, & x\in(-\infty,0) \end{cases} \quad \text{и} \quad |x+2|=\begin{cases} x+2, & x\in[-2,\infty) \\ -x-2, & x\in(-\infty,-2) \end{cases}.$$

Можни се следниве три случаи:

I. Ако $x\in(-\infty,-2)$, тогаш дадената равенка добива облик $-x+x+2=0$, односно $2=0$, што е невозможно. Според тоа, равенката нема решение во разгледуваниот интервал.

II. Ако $x\in[-2,0)$, тогаш дадената равенка добива облик $-x-x-2=0$, односно $x=-1$. Решението на равенката е $x=-1$.

III. Ако $x\in[0,\infty)$, тогаш дадената равенка добива облик $x-x-2=0$, односно $-2=0$, што е невозможно. Според тоа, равенката нема решение во разгледуваниот интервал.

Конечно, решение на дадената равенка е $x=-1$. ♦

Задачи

1. Реши ги равенките:

а) $(x-1)(x-2)-(x-3)(x-4)=6$ **б)** $3x^2-(3x+2)(x-1)=8$

2. Реши ги равенките:

а) $x-\frac{2}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{9-2x}{3}$ **б)** $\frac{y+17}{5}+2=\frac{3y-7}{4}$

3. Реши ги равенките:

а) $1+\frac{2x-\frac{10-7x}{3}}{2}=\frac{x}{2}+\frac{x-\frac{1+x}{3}}{3}$ **б)** $x+\frac{1+\frac{3x}{2}}{4}+\frac{2+\frac{x}{4}}{3}=2$

4. Реши ги равенките:

а) $\frac{2}{2x-3}+\frac{2x-3}{x}=2$ **б)** $\frac{y+1}{y-3}-\frac{y-1}{y+3}=\frac{8y}{y^2-9}$

5. а) $2x+|x|=3$ **б)** $|2x+1|+|x+3|=|x+6|$

5.3. Составување и решавање на линеарни равенки со една непозната

Решавањето на многу проблеми од природните и општествените науки, како и проблеми од нашето секојдневие, се сведуваат на составување и решавање на линеарни равенки со една непозната. Притоа, најсерозен дел од решавањето на проблемот е негово преведување во соодветна алгебарска форма. Иако нема строго определени правила за решавање на овие задачи, сепак, може да дадеме некои општи упатства, како постапно да дојдеме до решението на поставениот проблем.

Чекор 1. Внимателно ја проучуваме поставената задача и ги издвојуваме прашањата на кои треба да одговориме.

Чекор 2. Ги набројуваме сите непознати величини кои се наведуваат во задачата, како и мерниот број на секоја од нив, и ги означуваме со симболите x, $y, \dots$ итн.

Чекор 3. Ги користиме сите информации дадени во задачата за да ја определиме алгебарската врска мегу величините издвоени во чекор 2.

Чекор 4. Врз основа на условите во задачата ја составуваме равенката.

Чекор 5. Ја решаваме поставената равенка.

Чекор 6. Вршиме проверка на добиениот резултат, како во однос на составената равенка, така и во однос на условите и смислата на поставената задача.

Да напоменеме дека проверката е неопходн, бидејќи може да се случи равенката да е правилно поставена и решена, но за вредностите на решенијата задачата да нема смисла.

Задача 1. Збирот на два броја е 94. Поголемиот број е за 5 помал од два пати помалиот број. Кои се тие броеви?

Решение. Чекор 1. Прашање: Кои се двата броја?

Чекор 2. Непознати величини: Нека x е помалиот број. Тогаш поголемиот број е $94-x$, бидејќи нивниот збир е 94.

Чекор 3. Дадени информации: Поголемиот од броевите е за 5 помал од два пати помалиот број.

Чекор 4. Ја составуваме равенката: $94-x=2x-5$.

Чекор 5. Ја решаваме равенката: Равенката $94-x=2x-5$ е еквивалентна со равенката $94+5=2x+x$, која понатаму е еквивалентна со равенката $99=3x$, чие решение е $x_0=33$. Значи, помалиот број е 33, а поголемиот е $94-33=61$.

Чекор 6. Проверка на резултатот: $33+61=94$ и $94-33=2\cdot 33-5$. ♦

Задача 2. Јана е 7 години постара од нејзиниот брат. По 5 години збирот на нивните години ќе изнесува 63. Колку години има секој од нив?

Решение. Чекор 1. Прашање: Колку години имаат Јана и нејзиниот брат?

Чекор 2. Непознати величини: Нека x е бројот на години на Јана. Тогаш нејзиниот брат има $x-7$ години.

Чекор 3. Дадени информации: Условите дадени во задачата ги прикажуваме во табела:

Величини	Јана	Братот на Јана
Број на години	x	$x-7$
Број на години по 5 години	$x+5$	$(x-7)+5$

Бројот на годините на Јана по 5 години собран со бројот на годините на нејзиниот брат по 5 години е 63.

Чекор 4. Ја составуваме равенката: $(x+5)+[(x-7)+5]=63$.

Чекор 5. Ја решаваме равенката: Равенката $(x+5)+[(x-7)+5]=63$ е еквивалентна со равенката $2x+3=63$, чие решение е $x_0=30$. Значи Јана во моментов има 30 години, а нејзиниот брат $30-7=23$ години.

Чекор 6. Проверка на резултатот: $(30+5)+(23+5)=63$. ♦

Задача 3. Петар имал 6500 денари во банкноти од 50, 100 и 500 денари. Тој имал еднаков број на банкноти од секој вид. По колку банкноти имал од секој вид?

Решение. Нека Петар имал x банкноти од секој вид. Условите дадени во задачата ќе ги прикажеме во табела:

Величини	Банкноти од по 50 денари	Банкноти од по 100 денари	Банкноти од по 500 денари
Број на банкноти	x	x	x
Вредност во денари	50	100	500
Вкупна вредност во денари	$50x$	$100x$	$500x$

Бидејќи вкупната сума пари што ја имал Петаризнесувала 6500 денари, може да ја поставиме равенката

$$50x+100x+500x=6500$$

чие што решение е $x_0=10$. Според тоа, петар имал по 10 банкноти од секој вид.

Проверка: $50\cdot 10+100\cdot 10+500\cdot 10=6500$. ♦

Задача 4. Во еден супермаркет цените на прехрамбените артикли се намалиле за 40%. Ако цената на еден производ е 180 денари, да се најде неговата цена пред објавување на намалението.

Решение. Нека производот пред објавување на намалението чинел x денари. Ако цената на производот се намалила за 40%, тогаш цената на производот се намалила за $0,4x$ денари. Бидејќи цената на производот сега е 180 денари, доаѓаме до равенката

$$x-0,4x=180$$

чие што решение е $x_0=300$. Значи, цената на производот пред објавување на намалението била 300 денари.

Проверка: $300-0,4\cdot 300=180$. ♦

Задача 5. За заградување на правоаголна градина потребни се 130 метри жица. Должината на градинаа е за 5 метри поголема од ширината. Најди ги димензиите на градината.

Решение. Нека градината е широка x метри. Тогаш нејзината должина е $x+5$ метри. Ако знаеме дека за заградување на градината потребни се 130 метри жица, може да ја составиме равенката

$$2x+2(x+5)=130$$

чие што решение е $x_0=30$. Според тоа, градината е широка 30 метри и долга 35 метри.

Проверка: $2\cdot 30+2(30+5)=130$. ♦

Задача 6. Двајца трактористи заедно изоруваат една нива за 6 дена. Првиот тракторист сам може да ја изора нивата за 10 дена. За колку денови сам ќе ја изора нивата вториот тракторист?

Решение. Првиот тракторист сам ќе ја изора нивата за 10 дена, што значи за еден ден ќе изора $\frac{1}{10}$ од нивата. Вториот тракторист ќе ја изора нивата за x дена, што значи дека за еден ден ќе изора $\frac{1}{x}$ од нивата. Двајцата тракористи заедно ја изоруваат нива за 6 дена, што значи дека за еден ден ќе изораат $\frac{1}{6}$ од нивата.

Бидејќи делот од нивата што го изорале двата тракористи за еден ден, независно од тоа дали ораат заедно или поодделно, останува ист, може да ја составиме равенката

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$$

која за $x \neq 0$ е еквивалентна со равенката $3x+30=5x$ чие решение е $x_0=15$. Според тоа, вториот тракторист сам ќе ја изора нивата за 15 денови.

Проверка: $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$ ♦

Задачи

1. Една четвртина од еден број е за 3 поголема од една шестина од истиот број. Кој е тој број?

2. Мајката на Дарко е 3 пати постара од Дарко. Поо 14 години таа ќе биде 2 пати постара од него. колку години има секој од нив?

3. Цената на костумот на Соња е зголемена за 38% во однос на минатата година. Ако оваа година костумот чини 2700 денари, колку чинел минатата година?

4. Периметарот на рамнокрак триаголник е $36cm$, а основата му е за $3cm$ помала од кракот. Колкави се страните на триаголникот?

5. Еден базен се полни со една цевка за 4 часа. Кога е полн базенот се празни од друга цевка за 7 часа. За колку време ќе се наполни базенот ако се отворат двете цевки истовремено?

5.4. Линеарни неравенки со една непозната

Видови неравенки

Два рационални изрази сврзани со знак за неравенство сочинуваат неравенство. Ако двата изрази во неравенството се бројни изрази тогаш неравенството се нарекува **бројно неравенство**.

Неравенство во кое барем еден од двата изрази има една или повеќе променливи се нарекува **неравенка**. Променливите во неравенката се нарекуваат **непознати**, и вообичено се означуваат со $x, y, \ldots$ Множеството допуштени вредности на непознатите се вика **дефиниционо множество** на неравенката и се означува со D.

Пример 1. а) Неравенството $15-2\cdot 6>1$ е бројно неравенство, кое е вистинито.

б) Неравенството $5x+3<2$ е неравенка со $D=$ ○. ♦

Секоја неравенка преминува во бројно неравенство со задавање на вредности на непознатите од дефиниционото множество.

Пример 2. а) Неравенката $6+4x>3$ преминува во бројното неравенство $6+4\cdot 3>2$ кое е вистинито.

б) Неравенката $6+8x<-2$, за $x=0$ преминува во бројното неравенство $6<-2$. Притоа ова неравенство е невистинито. ♦

Неравенка која со замена на непознатите за сите вредности од дефиниционото множество преминува во вистинито бројно неравенство се нарекува **идентичко неравенство**.

Неравенка која со замена на непознатите за сите вредности од дефиниционото множество преминува во невистинито бројно неравенство се нарекува **невозможна неравенка**.

Пример 3. Неравенката $x^2\geq 0$ е идентитет, додека неравенката $x^2<0$ е невозможна неравенка. ♦

Еквивалентни неравенки

Во продолжение ќе се задржиме на неравенки од видот $f(x)>g(x)$, но сите изведени заклучоци ќе важат и во случај кога $f(x)<g(x)$, $f(x)\geq g(x)$ или $f(x)\leq g(x)$.

Две неравенки се нарекуваат **еквивалентни** ако имаат исто дефиниционо множество и исто множество решенија.

Пример 4. Неравенките $x>2$ и $x-2>0$ се еквивалентни бидејќи имаат дефиниционо множество ○ и множество решенија $R=(2,+\infty)$. ♦

За да решиме дадена неравенка, истата ја заменуваме со друга поедноставна но еквивалентна на неа. Потоа, таа неравенка ја заменуваме со трета поедноставна еквивалентна на неа, итн., се додека не дојдеме до неравенка чии решенија се очевидни. Заменувањето на дадена неравенка со друга поедноставна неравенка еквивалентна на неа нарекува трансформација на неравенката и се заснова на следниве две својства на еквивалентните неравенки.

1. Неравенката

$$f(x)>g(x) \qquad (1)$$

е еквивалентна на нерравенката

$$f(x)+\varphi(x)>g(x)+\varphi(x),$$

каде $\varphi(x)$ е израз кој е дефиниран за сите допуштени вредности на непознатата x во неравенката (1).

Со други зборови, ако кон двете страни на неравенката додадеме еден ист израз, кој е дефиниран за сите допуштени вредности на непознатата, ќе добиеме неравенка еквивалентна на дадената. Како последица од погорното својство имаме дека:

- Ако двете страни на неравенката имаат еднакви членови со исти знаци, тие може да се поништат (изостават).

- Секој член на неравенката може да се пренесе од едната страна на неравенката на другата страна, и притоа неговиот знак се менува во спротивен.

Пример 5. а) Од неравенката $5x-2x+3>8-2x$ со поништување на еднаквите членови се добива неравенката $5x+3>8$ која е еквивалентната на појдовната.

б) Кај неравенката $4x-5>3x-2$ сакаме на левата страна да ги групираме членовите што ја содржат непознатата. За таа цел членот $3x$ може да го пренесеме на левата страна на неравенката, пришто неговиот знак ќе се промени во спротивен. Исто така членот -5 може да го пренесе на десната страна од неравенката, пришто неговиот знак ќе се промени во спротивен. Притоа се добива неравенката $4x-3x>-2+5$ која е еквивалентна на дадената неравенка. ♦

2. Неравенката

$$f(x)>g(x) \qquad (2)$$

е еквивалентна на неравенката

$$f(x)\cdot\varphi(x)>g(x)\cdot\varphi(x),$$

каде $\varphi(x)$ е израз кој е дефиниран и добива само позитивни вредности за сите допуштени вредности на непознатата x во неравенката (2).

Со други зборови, ако двете страни на неравенката ги помножиме со еден ист израз, кој е дефиниран и добива само позитивни вредности за сите допуштени вредности на непознатата, ќе добиеме неравенка еквивалентна на дадената.

Како последица од погорното својство имаме дека ако двете страни на неравенката имаат заеднички позитивен множител, којшто не ја содржи непознатата, тогаш со него може да се поделат двете страни на неравенката. Во тој случај велиме дека неравенката ја скратуваме.

Пример 6. а) Ако двете страни на неравенката $3(x-2)<15$ ги поделиме 3 (или ги помножиме со $\frac{1}{3}$ ја добиваме неравенката $x-2<5,$ која е еквивалентна на појдовната неравенка. ♦

Да забележиме дека со примена на погорното својство, неравенка со дробни коефициенти може да се трансформира во неравенка со цели коефициенти, ако сите членови на неравенката се помножат со позитивен заеднички содржател на именителите. Ваквата трансформација се нарекува ослободување на неравенката од именители.

Пример 7. Неравенката

$$\frac{2x-7}{3}<\frac{x+1}{2}-5$$

ќе се ослободи од именителите, ако секој нејзин член се помножи со позитивен заеднички содржател на именителите, на пример со $2\cdot3=6.$ Така се добива неравенката $4x-14<3x+3-30,$ која е еквивалентна на дадената. ♦

3. Неравенката

$$f(x)>g(x) \qquad (2)$$

е еквивалентна на неравенката

$$f(x)\cdot\varphi(x)<g(x)\cdot\varphi(x),$$

каде $\varphi(x)$ е израз кој е дефиниран и добива само негативни вредности за сите допуштени вредности на непознатата x во неравенката (2).

Со други зборови, ако двете страни на неравенката ги помножиме со еден ист израз, кој е дефиниран и добива само негативни вредности за сите допуштени вредности на непознатата и ако ја промениме насоката ($<$ со $>$, $>$ со $<$, $\leq$ со $\geq$, $\geq$ со $\leq$) ќе добиеме неравенка еквивалентна на дадената.

Како последица од погорното својство имаме дека ако двете страни на дадена неравенка ги помножиме си -1, насоката на неравенката се менува во спротивна.

Пример 7. Ако двете страни на неравенката $-x > 7$ ги помножиме со -1, таа добива облик $x < -7$. ♦

Од последните две својства следува заклучокот дека ако двете страни на дадена неравенка се помножат со определен израз тогаш треба да се разгледаат случаите кога тој израз е позитивен, кога е негативен, а кога е еднаков на нула.

Задачи

1. Дали следниве неравенки се еквивалентни:

а) $3x^2+3x>12+3x^2$ и $3x>12$ **б)** $x+\frac{1}{x}\leq 5+\frac{1}{x}$ и $x\leq 5$?

2. Кои од следниве неравенки се идентитети:

а) $5x^2-2x^2\geq x^2$ **б)** $3x-2<3x+1$ **в)** $(y+5)^2\geq y^2+10y+5$?

5.5. Решавање на линеарни неравенки и неравенки што се сведуваат на линеарни неравенки со една непозната

Со сите погорни трансформации секоја линеарна неравенка со една непозната се сведува на линеарна неравенка од видот

$$ax+b>0 \text{ (или } ax+b\geq 0,) \qquad (1)$$

каде што a и b се броеви или изрази во кои не се јавува непознатата x. Неравенката (1) се нарекува **општ вид на линеарна неравенка со една непозната**, каде што a се вика **коефициент** пред непознатата, а b се вика **слободен член**. Да го испитаме нејзиното множество решенија.

1. Ако коефициентот $a>0$, тогаш таа е еквивалентна со неравенката $x>-\frac{b}{a}$ (или $x\geq-\frac{b}{a}$), чие што множество решенија е интервалот $\left(-\frac{b}{a},\infty\right)$ (или $\left[-\frac{b}{a},\infty\right)$).

2. Ако коефициентот $a<0$, тогаш таа е еквивалентна со неравенката $x<-\frac{b}{a}$ (или $x\leq-\frac{b}{a}$), чие што множество решенија е интервалот $\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right)$ (или $\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right]$).

3. Ако коефициентот $a=0$, тогаш таа е еквивалентна со неравенката $0\cdot x+b>0$ (или $0\cdot x+b\geq 0$), односно $b>0$ (или $b\geq 0$). Ако b е позитивен број (или позитивен број или нула) тогаш неравенката е идентичко неравенство, додека ако b е негативен број или нула (или негативен број) неравенката е невозможна.

Задача 1. Реши ја неравенката

$$\frac{x-3}{3}-1>\frac{x-1}{2}-2.$$

Решение. За да се ослободиме од именителите во неравенката, двете нејзини страни ги множиме со НЗС за именителите, односно со бројот 6, при што ја добиваме неравенката

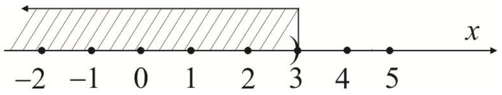
$$2(x-3)-6>3(x-1)-12.$$

Потоа се ослободуваме од заградите и ги групираме сите членови што ја содржат непознатата на левата страна, а слободните членови на десната страна. На тој начин доаѓаме до еквивалентната неравенка

$2x-3x>-3-12+6+6,$ односно $-x>-3.$

Со множење на двете нејзини страни со -1 добиваме $x<3.$ Значи, множеството решенија на неравенката го сочинуваат сите реални броеви од интервалот $(-\infty,3).$

Множеството решенија може графички да го претставиме на бројната оска, така што делот од бројната оска на кој лежат точките кои соодветствуваат на решенијата на неравенката го прецртуваме (цртеж 1). ♦



Цртеж 1

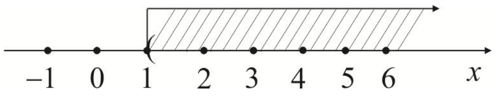
Задача 2. Реши ја неравенката

$$(x-2)^2-3x<x(x-3).$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката

$$x^2-4x+4-3x<x^2-3x$$

односно со неравенката $-4x<-4.$ Ако двете страни на неравенката ги поделиме со -4 ја добиваме неравенката $x>1.$ Според тоа, множеството решенија на неравенката го сочинуваат сите реални броеви поголеми од 1 (цртеж 2). ♦



Цртеж 2

Задачи

1. Претстави го графички множеството решенија на неравенките:

а) $x>3$ **б)** $x<-4$ **в)** $x+7>0$ **г)** $6x<24.$

2. Реши ја неравенката

а) $3x-4>2-x$ **б)** $5-2y<y+8$ **в)** $x-(2-x)<3x+7.$

3. Реши ја неравенката

а) $(x-3)^2<x(x+1)$ **б)** $\frac{x-5}{2}-3>\frac{3x-2}{6}$ **в)** $\frac{y}{2}-\frac{1-y}{4}>5-\frac{2+y}{3}.$

4. Реши ја неравенката

а) $2x-1<\frac{8-x}{2}$ **б)** $\frac{4x-3}{2}>\frac{2-x}{3}$ **в)** $\frac{2}{3}(2z-1)-\frac{2}{5}z\leq 4$

5. Висината на фиксната телефонска претплата изнесува 350 денари. Колку повици од по 20 денари можат да се направат за да висината на телефонската сметка не ја надмине вредноста од 1000 денари?

5.6. Системи и вкупност линеарни неравенки со една непозната

Системи линеарни неравенки со една непозната

За множество од две или повеќе линеарни неравенки со една иста непозната велиме дека образуват **систем линеарни неравенки со една непозната**, ако треба да се одредат сите вредности на променливата за кои се задоволени сите неравенки во системот.

Решение на систем линеарни неравенки со една непозната е секој реален број x за кој сите неравенки од системот преминуваат во точни бројни неравенства.

Множеството решенија на системот линеарни неравенки со една непозната се состои од сите реални броеви кои се решенија на системот, односно претставува пресек на множествата решенија на секоја од неравенките во системот.

Два система линеарни неравенки со една непозната се **еквивалентни** ако имаат еднакви множества решенија. Ако некоја од неравенките на системот се замени со еквивалентна неавенка на неа, тогаш добиениот систем е еквивалентен на дадениот. Според тоа, за да се реши систем линеарни неравенки со една непозната, доволно е да се реши секоја од неравенките поодделно, а потоа да се определи пресекот од множествата на нивните решенија. Во случај кога овој пресек е празното множество велиме дека системот е **противречен**.

Задача 1. Реши го системот неравенки:

$$\begin{cases}3x-5>7-x\\-x+8>0\end{cases}.$$

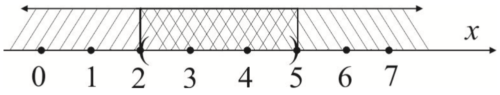
Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот $\begin{cases}x>3\\x<8\end{cases}$. Според тоа, множеството решенија на системот се состои од сите реални броеви помеѓу 3 и 8. ♦

Одредувањето на множеството решенија значително се олеснува, ако множеството решенија на секоја од неравенките на системот се претстави графички на бројната оска. Тоа го изведуваме така што ги прецртуваме сите делови од бројната оска на кои лежат точките за кои секоја оделна неравенка од системот е задоволена. Во тој случај, двојно прецртаниот дел од бројната оска, ако има таков, го претставува множеството решенија на дадениот систем.

Задача 2. Реши го системот неравенки:

$$\begin{cases}x>2\\x<5\end{cases}.$$

Решение. Ако графички ги претставиме множествата решенија на секоја од неравенките на дадениот систем ќе заклучиме дека множеството решенија на дадениот систем, графички прикажано на цртеж 3, се состои од сите реални броеви од интервалот $(2,5)$. ♦



Цртеж 3

Понекогаш, решавањето на некои неравенки со една непозната се сведува на решавање на систем линеарни неравенки со една непозната. Во продолжение ќе дадеме неколку такви примери.

Задача 3. Реши ја неравенката:

$$(x+5)(x-2)<0.$$

Решение. Левата страна на дадената неравенка е производ од два бинома. Тој производ ќе биде негативен, ако и само ако множителите имаат различни знаци. Според тоа, решавањето на дадената неравенка се сведува на системот неравенки

$$\begin{cases} x+5>0 \\ x-2<0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+5<0 \\ x-2>0 \end{cases}.$$

Првиот систем е еквивалентен со системот $\begin{cases} x>-5 \\ x<2 \end{cases}$, и негови решенија се сите реални броеви од интервалот $(-5,2)$.

Вториот систем е еквивалентен со системот $\begin{cases} x<-5 \\ x>2 \end{cases}$, кој е противречен, бидејќи не постои реален број кој истовремено е помал од -5 и поголем од 2.

Според тоа, множеството решенија на дадената неравенка го сочинуваат сите реални броеви од интервалот $(-5,2)$. ♦

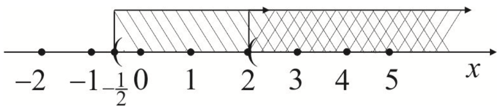
Задача 4. Реши ја неравенката:

$$\frac{5x}{2x+1}>2.$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $\frac{5x}{2x+1}-2>0$, односно неравенката $\frac{x-2}{2x+1}>0$. Левата страна на последната неравенка е дробно рационален израз, а десната страна е еднаква на нула. За да биде дропката позитивна, потребно е броителот и именителот да имаат исти знаци. Според тоа, непознатата x треба да ги задоволува условите

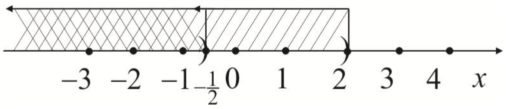
$$\begin{cases} x-2>0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-2<0 \\ 2x+1<0 \end{cases}.$$

Првиот систем е еквивалентен со системот $\begin{cases} x>2 \\ x>-\frac{1}{2} \end{cases}$, и негови решенија се сите реални броеви кои се поголеми од 2, бидејќи множеството решенија на првата неравенка се содржи во множеството решенија на втората неравенка (цртеж 4).



Цртеж 4

Вториот систем е еквивалентен со системот $\begin{cases} x<2 \\ x<-\frac{1}{2} \end{cases}$, и негови решенија се сите реални броеви кои се помали од $-\frac{1}{2}$, бидејќи множеството решенија на втората неравенка се содржи во множеството решенија на првата неравенка (цртеж 5).



Цртеж 5

Според тоа, множеството решенија на дадената неравенка го сочинуваат сите реални броеви од надвор од интервалот $\left(-\frac{1}{2},2\right)$, односно сите реални броеви од множеството $\mathbb{R}\setminus\left(-\frac{1}{2},2\right)$.♦

Вкупност линеарни неравенки со една непозната

За множество од две или повеќе линеарни неравенки со една иста непозната велиме дека **вкупност линеарни неравенки со една непозната**, ако треба да се одредат сите вредности на променливата за кои е задоволена барем една од неравенките во системот.

Решение на вкупност линеарни неравенки со една непозната е секој реален број x за кој барем една од неравенките во системот преминува во точно бројно неравенство.

Множеството решенија на вкупност линеарни неравенки со една непозната се состои од сите реални броеви кои се решенија на вкупноста, односно претставува унија на множествата решенија на секоја од неравенките во вкупноста.

Задача 5. Реши ја вкупноста неравенки:

$$\left[\begin{array}{l} 2x+3>9-4x \\ 6x+7<4x-3 \end{array}\right..$$

Решение. Дадената вкупност е еквивалентна со вкупноста $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-5 \end{array}\right.$. Множеството решенија на вкупноста се состои од сите реални броеви $x>1$ и сите реални броеви $x<-5$, што всушност е унијата $(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$. ♦

Задачи

Реши ги системите линеарни неравенки:

1. $\begin{cases} x-1<0 \\ -5x+2>0 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} -x-5<0 \\ 3x-8>0 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 2x-1>x-5 \\ x+3<3x-2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}<x+1 \\ 2x<2(x+1) \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 2x-3>x+1 \\ x<2(x-1) \\ \dfrac{x-1}{2}<3x-5 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{x}{2}>\dfrac{3x}{2}-4 \\ x-\dfrac{x-2}{3}>3-\dfrac{x+1}{2} \end{cases}$

Реши ги следниве неравенки:

7. $(x-5)(x+1)>0$ **8.** $\dfrac{4-x}{2x+3}>0$ **9.** $\dfrac{x-3}{x+1}>2$

Реши ја вкупноста неравенки:

10. $\left[\begin{array}{l} x-3>9-3x \\ 5x+7<10x-3 \end{array}\right.$ **11.** $\left[\begin{array}{l} 4-x<8-2x \\ 9x+14>4x-6 \end{array}\right.$ **12.** $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+3}{2}>\dfrac{9-4x}{3} \\ \dfrac{x+7}{4}<\dfrac{x-3}{3} \end{array}\right.$

13. Банкарски благајник има право на 2 недели одмор во текот на првата година и од вработувањето и по 3 недели во секоја понатамошна година. По колку години работење, бројот на недели поминати во одмор ќе биде поголем од 30?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

Реши ги равенките:

1. а) $7(x-3)=4(x+5)-47$ **б)** $16-9(3-u)+4u=15$

2. а) $t(t-3)+4=t^2-2(t+4)$ **б)** $(w-1)(w-2)=(w+3)(w-4)-3(w-1)$

3. а) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{4}=2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$ **б)** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{5}{6}=3\left(x+\dfrac{1}{9}\right)$

4. а) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{x+2}{x(x-2)}=\dfrac{4}{x(x-2)}$ **б)** $\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{3}{x-1}$

5. а) $\dfrac{4y-3}{y+2}=\dfrac{7y-2}{y-5}-3$ **б)** $\dfrac{7}{x-1}=\dfrac{9}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}$

6. а) $|x+5|-|2x-3|=2$ **б)** $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$

7. Бројот 38 разложи го на два собироци, така што половината од помалиот собирок е за 4 поголема од четвртината на поголемиот собирок. Кои се тие собироци?

8. Марина е 3 години постара од својот брат. По четири години збирот на нивните години ќе биде еднаков на 33. Колку години има секој од нив?

9. Ако страната на еден квадрат се зголеми за $5cm$, неговата плоштина ќе се зголеми за $345cm^2$. Колкава е страната на квадратот?

10. Три цевки, одделно секоја сама, може да наполнат еден базен за 10, 12 и 15 часа. За колку часа тие ќе го наполнат базенот заедно?

Реши ги неравенките:

11. а) $\frac{4x-3}{6} \leq \frac{x+1}{2}$ **б)** $\frac{7x-8}{3} \geq \frac{1-x}{4}$

12. а) $\frac{1-x}{2} + \frac{3-x}{4} < 2$ **б)** $\frac{x+3}{3} - \frac{3x+1}{2} > 0$

13. Марко имал 700 денари. Најди го максималниот број на колачи што може да ги купи од слаткарницата, ако цената на еден колач е 55 денари.

Реши ги системите неравенки:

14. $\begin{cases} 4-x>0 \\ 2x+5>0 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x+4<0 \\ -2x+1>0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 8-2x<3x-5 \\ 2x+5>0 \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} 3(x-2)-5>3+x \\ 2(x-1)-3<2 \\ 4x>3(x-1) \end{cases}$

Реши ги вкупностите неравенки:

18. $\left[\begin{array}{l} 9x-27>15+4x \\ 12x+1<14x-13 \end{array}\right.$ **19.** $\left[\begin{array}{l} \frac{5x-1}{4} > \frac{3-2x}{6} \\ \frac{x+5}{3} > \frac{6x+2}{4} \end{array}\right.$

Реши ги неравенките:

20. $(2x-1)(x+3)<0$ **21.** $\frac{2x}{x+1} > \frac{3}{4}$ **22.** $\frac{x^2+2x-5}{x-2} < x$

6. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА И СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

6.1. Линеарна функција

Функцијата од облик $f(x)=ax+b$, каде што $a,b\in\mathbb{R}$ се нарекува **линеарна функција**.

Реалните броеви a и b се нарекуваат **параметри** (a се вика и коефициент пред аргументот x, а b се вика слободен член), а x се вика **независна променлива (аргумент)**.

Дефиниционата област D_f на линеарна функција е $\mathbb{R}$. **Множеството вредности** V_f на линеарна функција е $\mathbb{R}$, ако $a\neq 0$. Ако, пак $a=0$, тогаш се добива $f(x)=b$ која се вика **константна функција**. За константната функција $V_f=\{b\}$.

Пример 1. Функцијата $f(x)=x+1$ е линеарна со параметри $a=1$ и $b=1$, дефинициона област $D_f=\mathbb{R}$ и $V_f=\mathbb{R}$. ♦

Вредноста на променливата за која функцијата добива вредност нула се нарекува **нула на функцијата**.

За линеарната функција $f(x)=ax+b$, каде $a\neq 0$, нула на функцијата е вредноста на променливата $x_0=-\frac{b}{a}$.

Задача 1. Одреди ја нулата на функцијата:

а) $f(x)=2x-4$

б) $f(x)=5x$

в) $f(x)=3x+7$

Решение. а) $x_0=\frac{4}{2}=2$, бидејќи $a=2$ и $b=-4$, б) $x_0=0$, в) $x_0=-\frac{7}{3}$. ♦

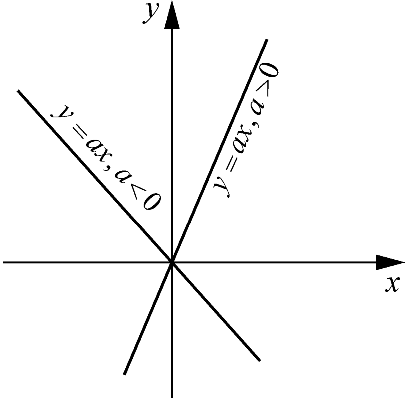
Задача 2. Одреди ја вредноста на параметарот a во функцијата $f(x)=ax+7$, ако $x_0=\frac{-2}{3}$ е нула на функцијата.

Решение. Од $-\frac{7}{a}=-\frac{2}{3}$ се добива дека $a=\frac{21}{2}$. ♦

Честопати велиме функцијата $y=ax+b$, иако мислиме на функцијата $f(x)=ax+b$ определена со правилото $y=ax+b$.

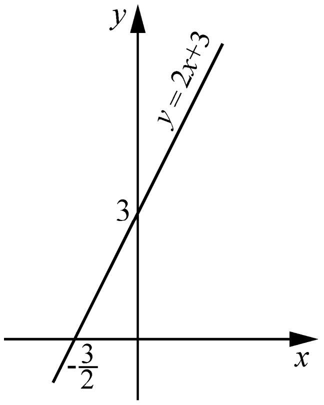
Графикот на линеарната функција е множеството $G_f = \{(x,y) \mid y = ax+b\}$. Геометриски тоа множество претставува права која ја сече $x-$оската во точката $\left(-\frac{b}{a},0\right)$, а $y-$оската во точката $(0,b)$.

Ако $b=0$, тогаш графикот на функцијата $f(x)=ax$ е права која минува низ координатниот почеток и за $a>0$ минува низ првиот и третиот квадрант, а за $a<0$ низ вториот и четвртиот квадрант (цртеж 1).



Цртеж1

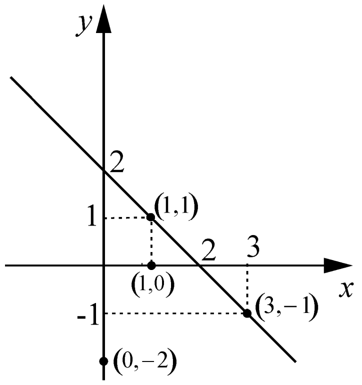
Пример 2. Графикот на линеарната функција $f(x)=2x+3$ е множеството $G_f = \{(x,y) \mid y = 2x+3\}$. Геометриски тоа множество претставува права која може да ја скицираме ако избереме две точки од множеството $G_f = \{(x,y) \mid y = 2x+3\}$, на пример $(0,3)$ и $(-1,1)$ (Цртеж 2). ♦



Цртеж 2

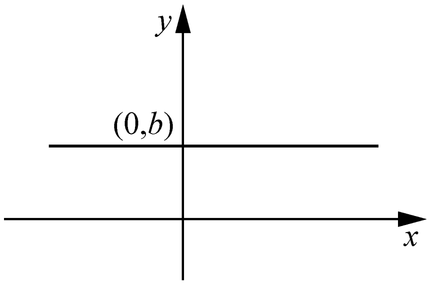
Задача 3. Дали точките $(1,0)$, $(3,-1)$, $(0,-2)$ и $(1,1)$ припаѓаат на множеството $G_f = \{(x,y) \mid y = -x+2\}$?

Решение. За да провериме дали точките припаѓаат на графикот на функцијата $f(x)=-x+2$ треба да ги замениме соодветните координати на точките и да провериме дали се добиваат точни равенства. Лесно се утврдува дека точките $(3,-1)$ и $(1,1)$ припаѓаат, а точките $(1,0)$ и $(0,-2)$ не припаѓаат на множеството (Цртеж 3). ♦



Цртеж 3

Ако $a=0$, тогаш $f(x)=b$, па графикот на функцијата $G_f=\{(x,b)\mid x\in\mathbb{R}\}$ е права која е паралелна со $x-$оската и ја сече $y-$оската во точката $(0,b)$ (Цртеж 4).



Цртеж 4

Задачи

1. Одреди ги параметрите a и b на функцијата:

а) $f(x)=6x-1$ **б)** $f(x)=1-2x$

в) $f(x)=\sqrt{3}x-\frac{1}{2}$ **г)** $f(x)=\frac{3x-5}{7}$

2. Одреди ја нулата на функцијата:

а) $f(x)=x-3$ **б)** $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}$

в) $f(x)=\frac{4-x}{9}$ **г)** $f(x)=\frac{2}{7}-\frac{x+1}{3}$

3. Одреди ја вредноста на параметарот a во функцијата:

а) $f(x)=(a+1)x+3$, ако $x_0=-1$ е нула на функцијата

б) $f(x)=\frac{2a+3}{5}x-\frac{1+x}{3}$, ако нејзиниот график минува низ точката $M(1,1)$

в) $f(x)=\frac{1}{a+1}x+\frac{3}{a}$, ако нејзиниот график ја сече $y-$оската во точката $N(0,3)$

4. Дадена е функцијата $f(x)=\frac{3x+1}{6}$. Провери која од дадените точки $A(1,1)$, $B(1,0)$, $C\left(\frac{1}{2},-3\right)$ и $D\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$ припаѓа на графикот на функцијата.

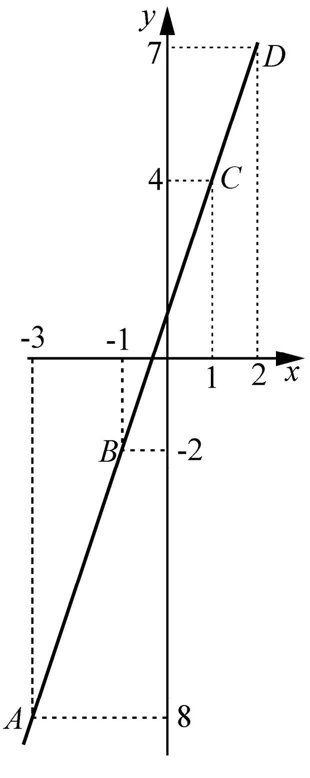
5. Одреди ја функцијата $f(x)=ax+b$, ако за нејзините параметри важи:

а) $a=3b$ и минува низ точката $A(1,1)$

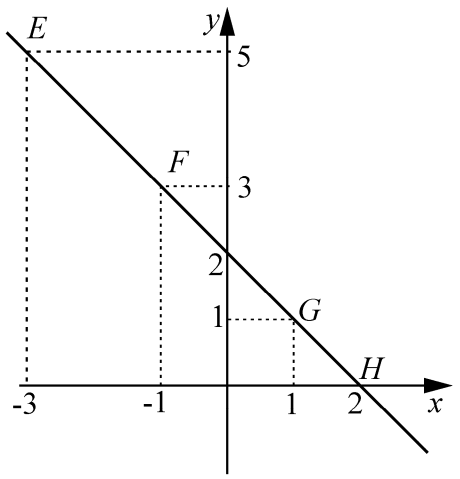
б) $5-a=2b$ и минува низ координатниот почеток

6.2. Својства на линеарна функција

Да го разгледаме графикот на функцијата $f(x)=3x+1$ (Цртеж 1). Во координатниот систем се претствени неколку точки кои припаѓаат на графикот на таа функција. Ако ги споредиме вредностите на координатите на точките $A(-3,-8)$, $B(-1,-2)$, $C(1,4)$ и $D(2,7)$ забележуваме дека кога вредноста на првата координата се зголемува, соодветната вредност на втората координата исто така се зголемува, т.е. од $-3<-1 \Rightarrow -8<-2$, $-1<1 \Rightarrow -2<4$ итн. Значи ако $x_1<x_2$, тогаш $f(x_1)<f(x_2)$. Во овој случај велиме дека функцијата **монотоно расте**.



Цртеж 1



Цртеж 2

Кога ќе направиме слична споредба за точките $E(-3,5), F(-1,3), G(1,1)$ и $H(2,0)$ за функцијата $f(x)=-x+2$ (Цртеж 2) доаѓаме до заклучок дека кога вредноста на првата координата се зголемува, соодветната вредност на втората координата се намалува, т.е. од $-3<-1 \Rightarrow 5>3$, $-1<1 \Rightarrow 3>1$ итн. Значи ако $x_1<x_2$, тогаш $f(x_1)>f(x_2)$. Во овој случај велиме дека функцијата **монотоно опаѓа**.

Во општ случај важи:

1. Ако $a>0$, тогаш функцијата монотоно расте

2. Ако $a<0$, тогаш функцијата монотоно опаѓа

За константната функција $f(x)=b$ ќе велиме дека ниту монотоно расте ниту монотоно опаѓа.

Пример 1. Функцијата $f(x)=4x-11$ монотоно расте бидејќи $a=4>0$, а кај функцијата $f(x)=3-x$, $a=-1<0$, па таа монотоно опаѓа. ♦

Задача 1. Одреди ја вредноста на параметарот m во функцијата:

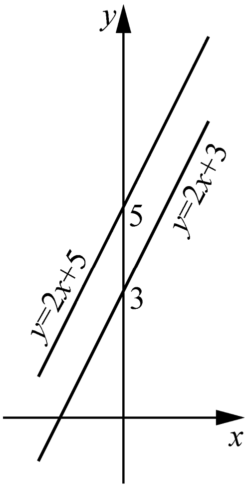
а) $f(x)=(m-1)x+3$, ако таа монотоно расте

б) $f(x)=(2m+1)x+1$, ако таа монотоно опаѓа.

Решение. а) $m-1>0 \Rightarrow m>1$ т.е. $m \in (1,\infty)$,

б) $2m+1<0 \Rightarrow m<-\frac{1}{2}$ т.е. $m \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$.

Да ги разгледаме графиците на функциите $f(x)=2x+3$ и $g(x)=2x+5$ (Цртеж 3). Забележуваме дека станува збор за две паралелни прави. ♦



Цртеж 3

Општо земено $f(x)=a_1x+b_1$ и $g(x)=a_2x+b_2$ се паралелни ако и само ако $a_1=a_2$. Ова равенство уште го нарекуваме **услов за паралелност** на графиците на две линеарни функции.

Јасно е дека, ако за функциите $f(x)=a_1x+b_1$ и $g(x)=a_2x+b_2$ важи $a_1 \neq a_2$ следува дека нивните графици имаат заедничка точка.

Задача 2. За која вредност на a правите се паралелни, ако:

а) $f(x)=1-x$ и $g(x)=ax+5$

б) $f(x)=7x+1$ и $g(x)=(a+1)x-7$

Решение. а) Според условот треба $a=-1$, **б)** $a+1=7 \Rightarrow a=6$.♦

Да разгледаме две линеарни функции $f(x)=a_1x+b_1$ и $g(x)=a_2x+b_2$. Што треба да важи за коефициентите на овие две функции така што нивните графици да минуваат низ иста точка $(0,b)$ т.е. да се сечат во ординатната оска?

Со замена на координатите на точката во функциите се добива дека $a_1 \cdot 0+b_1=b$ и $a_2 \cdot 0+b_2=b$ т.е $b_1=b_2=b$. Ова равенство уште го нарекуваме **услов за пресек** на графиците на две линеарни функции во ординатната оска.

Пример 2. Правите $y=3x+1$ и $y=-2x+1$ се сечат во точката $(0,1)$.♦

Задачи

1. Кои од следните функции $f(x)=2x+5$, $g(x)=-3x+2$, $h(x)=\frac{4}{5}-\frac{7}{8}x$ се монотоно растечки, а кои монотоно опаѓачки?

2. Одреди ја вредноста на параметарот k во функцијата:

а) $f(x)=(2k+3)x+3$, ако таа монотоно расте

б) $f(x)=(-5k+1)x+1$, ако таа монотоно опаѓа.

3. За која вредност на a правите се паралелни, ако:

а) $y=1-(2a-3)x$ и $y=ax+5$

б) $y=(a-7)x+1$ и $y=(a+1)x-7$

4. Одреди дали правите се сечат на ординатната оска.

а) $y=3x+2$ и $y=2-5x$

б) $y=\frac{3}{4}-\frac{4}{5}x$ и $y=\frac{9}{12}-x$

в) $y=-3-4x$ и $y=-5-6x$

5. За која вредност на параметарот s правите се сечат на ординатната оска, ако

а) $y=3\frac{1}{4}x+\left(2\frac{1}{7}-2s\right)$ и $y=\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{7}-s\right)$

б) $y=3x-(7-8s)$ и $y=\frac{1}{4}x-(4-9s)$

6.3. Линеарна равенка со две непознати

Дефиниција. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$. Равенката $ax+by=c$ се нарекува линеарна равенка со две непознати x и y.

Ова се нарекува **општ вид** линеарна равенка со две непознати. Броевите a и b се викаат **коефициенти пред непознатите**, а c се вика **слободен член**.

Пример 1. Равенки со две непознати се $5x-6y=9$, $3x=4y$, $y=1-x$ и други. ♦

Решение на линеарна равенка со две непознати е секој подреден пар од реални броеви за кој равенката преминува во точно бројно равенство.

Пример 2. Решенија на равенката $2x+3y=4$ се $\left(0,\frac{4}{3}\right),\left(1,\frac{2}{3}\right)$, итн. ♦

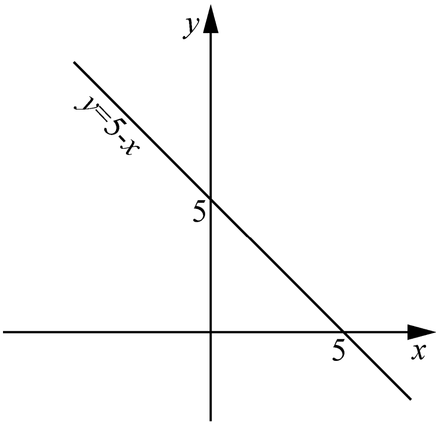
Ако $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, тогаш равенката со две непознати има бесконечно многу решенија. Имено, за секој $x \in \mathbb{R}$ подредениот пар $\left(x, \frac{c-ax}{b}\right)$ е решение на равенката $ax+by=c$. Бидејќи $y=\frac{c-ax}{b}=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ следува дека множеството решенија на линеарната равенка со две непознати е права, каде $-\frac{a}{b}$ се вика коефициент на правец (аглов коефициент).

Ако еден од коефициентите пред непознатите е еднаков на нула, на пример $b=0$, се добива $ax=c$ т.е. $x=\frac{c}{a}$ и множеството решенија на равенката е $\left\{\left(\frac{c}{a}, y\right) \middle| y \in \mathbb{R}\right\}$. Во овој случај множеството решенија на равенката е права паралелна со $y-$оската. Аналогно се добива права паралелна со $x-$оската ако $a=0$. Ако, пак, и двата коефициенти се еднакви на нула т.е. $a=b=0$, тогаш за $c=0$ равенката е точна за секои реални броеви x и y,а ако $c \neq 0$ равенката нема решение.

Пример 3. Равенката $x+y=5$ има бесконечно решенија и нејзиното множеството решенија е

$$\{(x, 5-x) | x \in \mathbb{R}\},$$

т.е правата $y=5-x$ (Цртеж 1). ♦



Цртеж 1

Две равенки се нарекуваат еквивалентни ако имаат исти множества решенија.

Со следниве трансформации (кои се нарекуваат еквивалентни трансформации) се добиваат еквивалентни равенки

1. Едната страна од равенката се замени со идентички еднаков израз
2. На двете страни од равенката се додаде ист израз
3. Двете страни од равенката се помножат или поделат со ист број различен од нула.

Пример 4. Равенката $3x+7y=2$ е еквивалентна со секоја од равенките $3x+7y=2-x+x$, $x+\frac{7}{3}y=\frac{2}{3}$, $3x+7y-7y=2-7y$, $2-3x=7y$. ♦

Задача 1. Равенката $\frac{x}{2}-\frac{y-3}{5}-2=3-x$ доведи ја во општ облик со еквивалентните трансформации.

Решение.

$$\frac{x}{2}-\frac{y-3}{5}-2=3-x \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{y-3}{5}-2=3-x \Big/ \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x-2(y-3)-20=30-10x \big/ +10x \Leftrightarrow 15x-2y+6-20=30 \big/ +14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x-2y=44. ♦$$

Задачи

1. За која вредност на b графикот на $2x+by=5$ минува низ точката $A(-1,3)$?

2. Одреди ја вредноста на c во равенката $2x-7y=c$ така што графикот минува низ точката $B(1,-1)$.

3. Со помош на еквивалентни трансформации дадената равенка $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=3$ доведи ја до општ вид.

4. Запиши го множеството решенија на равенката $\frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{5}-1=0$

5. Во множеството решенија на равенката $3(x-y)+2=x-5y+1$ одреди го она решение за кое $x=2y$.

6.4. Систем од две линеарни равенки со две непознати. Методи за решавање

Дефиниција. Множеството од две линеарни равенки со две (исти) непознати се вика систем од две линеарни равенки со две непознати.

Пример 1. $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ x-4y=-2 \end{cases}$ е систем од две линеарни равенки со две непознати. ♦

Ако секоја равенка од системот се замени со нејзина еквивалентна, тогаш се добива систем кој е еквивалентен со почетниот. Според тоа, секој систем од две линеарни равенки со две непознати може да се сведе во општ вид $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, каде a_1,a_2,b_1 и b_2 се коефициенти пред непознатите, а c_1 и c_2 се слободни членови.

Задача 1. Сведи го во општ вид системот $\begin{cases} 2(x+1)-3=5(y+2) \\ \frac{x}{3}-\frac{y+2}{5}=1 \end{cases}$.

Решение. Првата равенка е еквивалентна со равенката $2x-5y=11$, а втората со $5x-3y=21$, па системот е еквивалентен со $\begin{cases} 2x-5y=11 \\ 5x-3y=21 \end{cases}$. ♦

Да се реши систем равенки значи да се одреди онаа вредност на непознатите x и y за која и двете равенки преминуваат во точно бројно равенство.

Пример 2. Парот $(1,-2)$ е решение на системот $\begin{cases} x+3y=-5 \\ 2x-y=4 \end{cases}$, но не е решение на системот $\begin{cases} x+3y=-5 \\ 2x+y=4 \end{cases}$, бидејќи $2\cdot1-2\neq4$.♦

Притоа не секој систем има решение. Имено системот $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ очигледно нема решение, бидејќи збирот на два броја не може истовремено да прими две различни вредности, додека пак системот $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ има бесконечно многу решенија $\{(x,1-x) \mid x\in\mathbb{R}\}$, бидејќи постојат бесконечно многу реални броеви чиј збир е еднаков на еден.

<u>Методи за решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати</u>

Ако се помош на елементарни трансформации еден систем се доведе до облик $\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$, тогаш парот (p,q) е решение на системот.

Пример 3. Системот $\begin{cases} 2(x+y)-3=2y+1 \\ 3x-y+1=-2x+5(x+1) \end{cases}$ е еквивалентен со $\begin{cases} 2x=4 \\ -y=4 \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ од каде е јасно дека $(2,-4)$ е решение на системот. ♦

Главната идеја на систе методи за решавање е секој систем да се доведе до обликот $\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$. Ќе разгледаме некои од најчесто користените методи за решавање.

1. Графички метод

Велиме дека еден систем е решен со графички метод ако секоја од линеарните равенки кои се дел од системот е претставена со права, а од заемната положба на правите ќе зависи решението на системот.

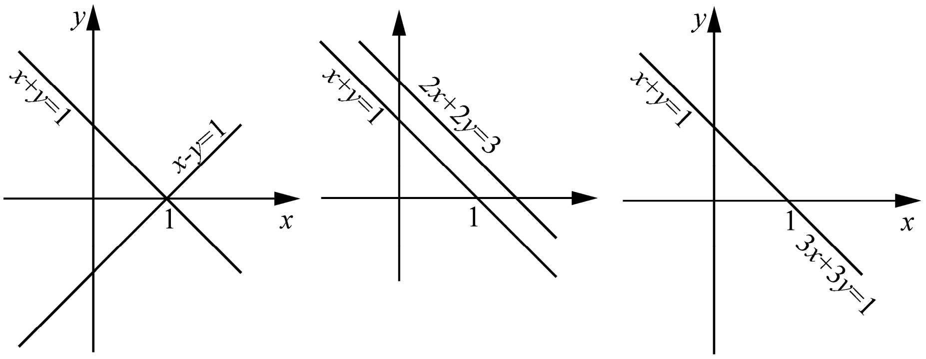
Ако двете прави се сечат, тогаш велиме дека пресечната точка е решение на системот (системот е определен).

Ако двете прави се паралелни, тогаш системот нема решение (системот е противречен).

Ако двете прави се совпаѓаат, тогаш системот има бесконечно многу решенија (системот е неопределен).

Задача 2. Графички реши го системот:

а) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+3y=3 \end{cases}$



а) б) в)

Од цртежите јасно се гледа решението за секој од системите. ♦

Да разгледаме кои услови треба да се исполнат за да одредиме дали системот е определен, противречен или неопределен.

Ако во системот $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ важи $b_1=0$ (или $b_2=0$), тогаш решението на системот е во пресекот на правите $x=\frac{c_1}{a_1}$ и $y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2}$.

Ако, пак, $a_1=0$ (или $a_2=0$) решението е во пресекот на правите $y=\frac{c_1}{b_1}$ и $y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2}$.

Конечно ако $a_1=0\wedge b_2=0$ (или $a_2=0\wedge b_1=0$) решението е во пресекот на правите $y=\frac{c_1}{b_1}$ и $x=\frac{c_2}{a_2}$.

Ако $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ е општиот вид на системот, тогаш секоја од равенките во системот може да се запише како $\begin{cases} y=-\frac{a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1} \\ y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2} \end{cases}$, кога $b_1\neq 0, b_2\neq 0$.

Ако $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$, т.е. соодветните коефициенти пред непознатите не се пропорционални, правите немаат ист коефициент на правец, што значи дека тие се сечат. Системот има единствено решение, т.е. е определен.

Ако $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ може да се случи $\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}$ или $\frac{c_1}{b_1}\neq\frac{c_2}{b_2}$. Во првиот случај правите се совпаѓаат, па решение е секоја точка од правата (системот е неопределен), а во вториот случај правите се паралелни, па системот нема решение (противречен систем). Значи ако соодветните коефициенти и слободни членови се пропорционални велиме дека системот е неопределен (има бесконечно многу решенија).

Задача 3. За која вредност на параметарот m системот е:

а) $\begin{cases} 2x+my=1 \\ -4x+2y=5 \end{cases}$ противречен

б) $\begin{cases} mx-y=3 \\ 2x-my=2 \end{cases}$ е определен

в) $\begin{cases} x+3y=5 \\ x+my=m+2 \end{cases}$ е неопределен

Решение. а) Од условите $b_1 \neq 0$, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{c_1}{b_1}\neq\frac{c_2}{b_2}$ се добива $m\neq 0$, $\frac{2}{m}=-\frac{4}{2}$ и $\frac{1}{m}\neq\frac{5}{2}$ т.е. $m\neq 0$, $m=-1$ и $m\neq\frac{2}{5}$, ако, пак $m=0$ ќе се добие системот $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{7}{2} \end{cases}$. Бараната вредност на m е $m=-1$.

б) Од $b_2\neq 0$ и $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$ се добива $m\neq 0$ и $m\neq\frac{2}{m}$ т.е. $m^2\neq 2 \Leftrightarrow m\neq\pm\sqrt{2}$. Ако, пак, $m=0$ се добива системот $\begin{cases} y=-3 \\ x=1 \end{cases}$.

в) Од условите $b_2\neq 0$, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}$ се добива $m\neq 0$, $\frac{1}{3}=\frac{1}{m}$ и $\frac{5}{3}=\frac{m+2}{m}$ т.е $m\neq 0$ и $m=3$, ако, пак, $m=0$ имаме $\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$. Бараната вредност на m е $m=3$. ♦

2. Метод на замена на променливата

Ако во еден систем една од променливите се изрази преку другата од едната равенка, а потоа добиенит израз се замени во другата равенка ќе се добие систем кој е еквивалентен на дадениот.

Ако во системот $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ при $b_1\neq 0$ изразот $y=\frac{-a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1}$ го замениме во втората равенка ќе имаме $a_2x+b_2\left(\frac{-a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1}\right)=c_2$. Се добива системот $\begin{cases} y=\frac{-a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1} \\ x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_2b_1-a_1b_2} \end{cases}$ кој е еквивалентен со дадениот, при $a_2b_1-a_1b_2\neq 0$.

Задача 4. Реши го системот $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-3y=1 \end{cases}$ со метод на замена.

Решение. Од првата равенка $y=3-2x$, па со замена на овој израз во втората равенка ќе се добие $x-3(3-2x)=1 \Leftrightarrow 7x=10$ т.е. $x=\frac{10}{7}$. ♦

3. Метод на спротивни коефициенти

Ако барем една од равенките се помножи со некој реален број различен од нула и таа се додаде на другата равенка, тогаш се добива нова равенка која со една од равенките од првобитниот систем дава еквивалентен систем со дадениот. Притоа, бројот со кој се множи едната равенка се избира така што новодобиената равенка е равенка со една непозната. Ова постапка е позната како метод на спротивни коефициенти.

Задача 5. Реши го системот $\begin{cases} x+2y=3 \\ 5x-y=4 \end{cases}$ со метод на спротивни коефициенти.

Решение. Ако втората равенка ја помножиме со 2 и ја собереме со првата ќе се добие равенката $x+2y+2\cdot(5x-y)=3+2\cdot 4$ т.е. $11x=11$, па сега оваа равенка со било која равенка од првобитниот систем дава систем еквивалентен со почетниот. Значи, $\begin{cases} x+2y=3 \\ 11x=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$. Според тоа решение на системот е $(1,1)$. ♦

4. Крамеров метод

Изразот $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{def}{=} a\cdot d-b\cdot c$ се нарекува детерминанта од втор ред (a и d се елементи од главната дијагонала, а b и c од споредната дијагонала).

Нека $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ е систем во општ вид. Изразите

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1 \text{ и } \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$$

се викаат детерминанти на системот и тоа Δ е главна, а Δ_x и Δ_y се придружени на соодветните непознати.

Ако $\Delta\neq 0$, тогаш системот има единствено решение $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$ и $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$. Овие формули за решението се нарекуваат **Крамерови формули**.

Ако важи $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, тогаш системот е неопределен, а ако $\Delta=0$ и барем една од детерминантите $\Delta_x\neq 0$ или $\Delta_y\neq 0$, тогаш системот е противречен.

Задача 6. Со помош на Крамеровиот метод, реши го системот $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-y=3 \end{cases}$.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)-3\cdot 1 = -2-3 = -5$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -15$, од каде се добива $x = \frac{-10}{-5} = 2$ и $y = 3$. ♦

5. Гаусов метод

Системот е решен со Гаусов метод ако ги направиме следните еквивалентни трансформации:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 / : a_1, a_1 \neq 0 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{b_1}{a_1}y=\frac{c_1}{a_1} / (-a_2) \\ a_2x+b_2y+(-a_2)\cdot\left(x+\frac{b_1}{a_1}y\right)=c_2+(-a_2)\cdot\frac{c_1}{a_1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{b_1}{a_1}y=\frac{c_1}{a_1} \\ \left(b_2+(-a_2)\frac{b_1}{a_1}\right)y=c_2+(-a_2)\cdot\frac{c_1}{a_1} \end{cases}$$

На овој начин прво се одредува вредноста на на непознатата y, а потоа на непознатата x.

Аналогно, може да се направат овие трансформации и ако $b_1 \neq 0$ и првата равенка ако се подели со b_1.

Задача 7. Реши го системот $\begin{cases} 5x-7y=1 \\ 8x+3y=30 \end{cases}$ со Гаусов метод.

Решение.

$$\begin{cases} 5x-7y=1/:5 \\ 8x+3y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{7}{5}y=\frac{1}{5} / \cdot(-8) \\ 8x+3y-8x+\frac{56}{5}y=-\frac{8}{5}+30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{7}{5}y=\frac{1}{5} \\ \frac{71}{5}y=\frac{142}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}. ♦$$

6. Метод на изедначување

Овој метод се однесува на изедначување на изразите кои се добиваат кога иста непозната ќе ја изразиме од секоја од равенките во системот и добиените изрази ги изедначиме. Значи, ако во системот $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ ја изразиме непознатата x (при услов $a_1 \neq 0 \wedge a_2 \neq 0$) од двете равенки и добиените изрази ги изедначиме ќе се добие равенството $\frac{c_1-b_1y}{a_1}=\frac{c_2-b_2y}{a_2}$, од каде се добива вредноста на y. Потоа од една од равенките на системот се наоѓа вредноста на непознатата x.

Задача 8. Реши го системот $\begin{cases}4x+2y=3\\3x-2y=1\end{cases}$ со метод на изедначување.

Решение. Со изедначување на изразите за непознатата x се добива $\frac{3-2y}{4}=\frac{1+2y}{3}$ од каде $y=\frac{5}{14}$, а $x=\frac{4}{7}$. ♦

7. Метод на помошна непозната

Системите од видот

$$\begin{cases}\frac{a_1}{x}+\frac{b_1}{y}=c_1\\\frac{a_2}{x}+\frac{b_2}{y}=c_2\end{cases},\quad\begin{cases}\frac{a_1}{x+y}+\frac{b_1}{x-y}=c_1\\\frac{a_2}{x+y}+\frac{b_2}{x-y}=c_2\end{cases}$$

се решаваат со воведување на помошна непозната $\frac{1}{x}=m$ и $\frac{1}{y}=n$ (или $\frac{1}{x+y}=m$ и $\frac{1}{x-y}=n$) при услов $x\neq 0$ и $y\neq 0$ (или $x+y\neq 0$ и $x-y\neq 0$). Тогаш се добива системот $\begin{cases}a_1m+b_1n=c_1\\a_2m+b_2n=c_2\end{cases}$ кој има две непознати m и n и може да се реши на некој од претходните начини.

Задача 9. Реши го системот: $\begin{cases}\frac{2}{3x-y}+\frac{5}{3x+y}=3\\\frac{3}{3x-y}-\frac{10}{3x+y}=1\end{cases}$.

Решение. Системот го решаваме за оние вредности на x и y за кои $3x-y\neq 0$ и $3x+y\neq 0$. Ставаме смена $\frac{1}{3x-y}=m$ и $\frac{1}{3x+y}=n$. Тогаш го добиваме системот $\begin{cases}2m+5n=3\\3m-10n=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=\frac{1}{5}\end{cases}$. Ако се вратиме во смената имаме $\frac{1}{3x-y}=1\Rightarrow 3x-y=1$ и $\frac{1}{3x+y}=\frac{1}{5}\Rightarrow 3x+y=5$. Значи го добивме системот $\begin{cases}3x-y=1\\3x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$. Ова е решение бидејќи е исполнет условот $3x-y\neq 0$ и $3x+y\neq 0$. ♦

Задачи

1. Дадените системи реши ги графички

а) $\begin{cases}3x+y=7\\2x-3y=1\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}3x+y=5\\x-2y=-1\end{cases}$

2. Дадените системи реши ги со метод на замена

а) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$

3. Дадените системи реши ги со метод на спротивни коефициенти

а) $\begin{cases} x+5y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 3x-10y=1 \end{cases}$

4. Дадените системи реши ги со Крамеровите формули

а) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 4x-y=5 \end{cases}$

5. Дадените системи реши ги со Гаусов метод

а) $\begin{cases} x-3y=4 \\ x-y=8 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 4x-y=10 \\ 2x-y=4 \end{cases}$

6. Дадените системи реши ги со метод на изедначување

а) $\begin{cases} 4x-3y=7 \\ 5x+2y=26 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 6x-5y=8 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$

6.5. Примена на систем од две линеарни равенки со две непознати

Голем број на проблеми од секојдневието, техниката и науката воопшто, се сведуваат на решавање равенки и системи равенки.

Пример 1. На еден тест по математика има 10 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат 3 бода, а за секоја неточно решена задача се одземаат 2 бода. Колку задачи точно решил ученикот кој освоил 15 бода и ги решавал сите задачи?

Ако бројот на точно решени задачи го означиме со x, а бројот на погрешно решени задачи го означиме со y, тогаш $3x-2y=15$ е бројот на бодови кои ги освоил ученикот. Притоа знаеме дека оваа линеарна равенка со две непознати има бесконечно многу решенија. Ако го земеме предвид фактот што тестот има точно 10 задачи и ученикот ги решавал сите, тогаш мора да го додадеме и условот $x+y=10$. Од друга страна и оваа равенка има бесконечно многу решенија. Ја бараме онаа вредност на x и y за која двете равенки ќе преминат во точни бројни равенства т.е. го решаваме системот $\begin{cases} 3x-2y=15 \\ x+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$. Ученикот точно решил 7 задачи. ♦

Пример 2. Имаме два сада кои собираат 144 и 100 литри. Во садовите има одредено количество течност. Ако течноста од помалиот сад ја претуриме во поголемиот и го дополниме до врв, тогаш во помалиот сад ќе остане $\frac{1}{5}$ од првобитното количество. Ако, пак, течноста од поголемиот ја претуриме во помалиот сад и го дополниме, тогаш во поголемиот сад ќе останат $\frac{7}{12}$ од првобитното количество. Колку течност имало во садовите пред претурањето?

Решение. Да ги означиме бараните количества со x и y. Тогаш

$$\begin{cases} x+\frac{4}{5}y=144 \\ y+\frac{5}{12}x=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=96 \\ y=60 \end{cases}. \blacklozenge$$

Пример 3. Две цевки полнат еден базен. Првата цевка работи 7 часа, а втората 4 часа. За ова време тие исполниле $\frac{5}{9}$ од базенот. Потоа наредните 4 часа, двете цевки работат истовремено, и утврдено е дека остануваат уште $\frac{1}{18}$ од базенот. За колку време секоја цевка, работејќи самостојно, може да го исполни базенот?

Решение. Ако времето што е потребно едната цевка да го исполни сама базенот го означиме со x, а за втората цевка со y, тогаш за еден час првата цевка ќе исполни $\frac{1}{x}$ дел, а втората $\frac{1}{y}$ дел од базенот. Со оглед на тоа што првата цевка работела 7 часа, таа исполнила $\frac{7}{x}$ дел од базенот, а втората $\frac{4}{y}$ дел, па заедно $\frac{7}{x}+\frac{4}{y}=\frac{5}{9}$. Времето од 4 часа кога работат истовремено е $\frac{4}{x}+\frac{4}{y}$ и конечно системот кој одговара на задачата е:

$$\begin{cases} \frac{7}{x}+\frac{4}{y}=\frac{5}{9} \\ \frac{4}{x}+\frac{4}{y}=1-\frac{5}{9}-\frac{1}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{x}+\frac{4}{y}=\frac{5}{9} \\ \frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{7}{18} \end{cases}.$$

Ако ставиме смена $\frac{1}{x}=m$ и $\frac{1}{y}=n$, тогаш се добива системот

$$\begin{cases} 7m+4n=\frac{5}{9} \\ 4m+4n=\frac{7}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{18} \\ n=\frac{3}{72} \end{cases}.$$

За вредностите на x и y имаме $x=18, y=\frac{72}{3}=24$. ♦

Задачи

1. Група ученици решиле да соберат средства и да купат одреден број на садници. Ако секој од нив даде по 150 денари, тогаш им недостигаат уште 170 денари, а ако секој даде по 180 денари ќе имаат вишок од 100 денари. Колку ученици има во групата и колку пари се потребни за садниците?

2. Збирот на два броја е 130, а нивната разлика е 22. Кои се тие броеви?

3. Збирот на два броја е 20, а разликата 4. Кои се тие броеви?

4. Аголот при врвот на еден рамнокрак триаголник е четири пати помал од аголот при основата. Одреди ја големината на аглите во триаголникот.

5. Должината на еден правоаголник е два пати поголема од неговата ширина. Колкава е должината и ширината на правоаголникот, ако неговиот периметар изнесува $72cm$?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Одреди ја нулата на функцијата:

а) $f(x)=3x-3$ **б)** $f(x)=2x+11$

в) $f(x)=\frac{4-5x}{9}$ **г)** $f(x)=\frac{x+1}{3}+\frac{2x+3}{2}$

2. Одреди ја вредноста на параметарот a во функцијата:

а) $f(x)=(a+3)x+1$, ако $x_0=-2$ е нула на функцијата

б) $f(x)=\frac{a-3}{2}x-\frac{1+(a+1)x}{3}$, ако нејзиниот график минува низ точката $M(1,0)$

в) $f(x)=\frac{1}{a+3}x+\frac{3}{a+2}$, ако нејзиниот график ја сече $x-$оската во точката $N(1,0)$

3. Одреди ја функцијата $f(x)=ax+b$, ако за нејзините параметри важи:

а) $a=3b$ и минува низ точката $A(2,1)$

б) $3-a=2b$ и минува низ координатниот почеток

4. Одреди ја вредноста на параметарот k во функцијата:

а) $f(x)=(3k+1)x-2$, ако таа монотоно расте

б) $f(x)=(-5k-1)x+3$, ако таа монотоно опаѓа.

5. За која вредност на a правите се паралелни, ако:

а) $y=1-(12a-3)x$ и $y=(a+1)x+5$

б) $y=(2a-7)x+1$ и $y=(3a+1)x-7$

6. За која вредност на параметарот m правите се сечат на ординатната оска, ако

а) $y=3\frac{1}{4}x+\left(2\frac{1}{7}-3m\right)$ и $y=\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{7}+m\right)$

б) $y=3x-(7-m)$ и $y=\frac{1}{4}x+(4-2m)$

7. За која вредност на b графикот на $2x+by=5$ минува низ точката $A(-1,5)$?

8. Одреди ја вредноста на c во равенката $2x-8y=c$ така што графикот минува низ точката $B(1,-1)$.

9. Со помош на еквивалентни трансформации дадената равенка $\frac{x+1}{2}-\frac{y-2}{4}=3$ доведи ја до општ вид.

10. Запиши го множеството решенија на равенката $\frac{x+5}{3}-\frac{y+3}{5}-1=0$

11. Во множеството решенија на равенката $5(x-y)+2=3x-2y+1$ одреди го она решение за кое $x=2y$.

12. Дадените системи реши ги графички

а) $\begin{cases} 5x+y=7 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x+y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$

13. Дадените системи реши ги со метод на замена

а) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-3y=-5 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x-2y=2 \\ 3x-y=10 \end{cases}$

14. Дадените системи реши ги со метод на спротивни коефициенти

а) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$

15. Дадените системи реши ги со Крамеровите формули

а) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} -3x+2y=-5 \\ 4x-y=5 \end{cases}$

16. Дадените системи реши ги со Гаусов метод

а) $\begin{cases} x-3y=4 \\ x+2y=8 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 4x-y=10 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$

17. Дадените системи реши ги со метод на изедначување

а) $\begin{cases} 4x-3y=7 \\ 5x+y=16 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 6x-5y=8 \\ -2x+3y=2 \end{cases}$

18. Четворица другари сакаат да купат фудбалска топка. Првиот дал половина од сумата, вториот дал една третина од сумата на останатите тројца, третиот дал една четвртина од сумата на останатите тројца и четвртиот дал 50 денари. Колку денари чини топката?

19. Ако на $8l$ топла вода се додадат $2l$ поладна вода ќе се добие вода на температура од $66^\circ C$, а ако, пак на $7l$ топла вода се додадат $3l$ поладна вода ќе се добие вода на температура од $59^\circ C$. Колкава е температурата на топлата и поладната вода?

20. Реши го системот $\begin{cases} (2x-3):(y+5)=3:4 \\ (5x-4):(3y+1)=5:2 \end{cases}$.

7. ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ ВО РАМНИНА

7.1. Основни и изведени поими

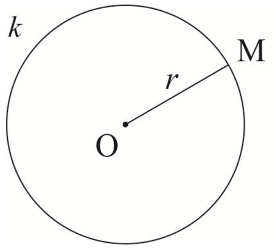
Во досегашното школување се запознавте со повеќе поими од геометрија: точка, права, рамнина, кружница, круг, агол итн. Некои од тие поими се воведуваат со одредени искажувања (реченици), а други се разјаснуваат со наведување само на примери.

Реченицата, со која се искажува смислата и содржината на одреден поим, се вика **дефиниција** на тој поим.

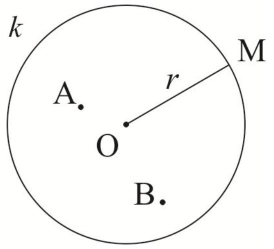
Пример 1. Поимите кружница и круг ги воведуваме со дефинициите:

„Множеството од сите точки во рамнината, чие растојание до една дадена точка O во таа рамнина е еднакво на $r,$ се вика **кружница** со центар O и радиус r и се означува со $k(O,r)$“ (цртеж 1а).

„Множествотоод сите точки во рамнината, чие растојание до една дадена точка O во таа рамнина е помало или еднакво на $r,$ се вика **круг** со центар O и радиус r и се означува со $K(O,r)$“ (цртеж 1б). ♦



Цртеж 1а



Цртеж 1б

Гледаме дека при дефинирањето на поимите кружница и круг користиме други поими: множество, точка, рамнина и растојание, како познати. Ова се случува при дефинирањето на многу други поими. Според тоа, дефинирањето на еден поим се состои во тоа што неговата смисла и содржина се искажува со помош на други „веќе познати“ поими. Но, тие „веќе познати“ поими исто така треба да бидат дефинирани со помош на некои трети претходно познати поими, итн.

Очигледно е дека, тој синџир на дефинирање на еден поим со помош на друг неминовно ќе прекине, кога ќе дојдеме до некој поим кој не може да се дефинира, бидејќи „веќе познати“ поедноставни поими нема. Таквите поими присилени сме да ги прифатиме без дефиниција и да ги објаснуваме единствено преку наведување на примери. Поимите што ги прифаќаме без дефиниција се викаат **појдовни** или **основни поими**, а сите други поими се викаат **изведени поими**.

При изградбата на **рамнинска геометрија** се тргнува од основните поими: **точка**, **права**, **рамнина** и **растојание**, а потоа користејќи ги нив како и други математички поими се дефинираат останатите геометриски поими.

Видовме дека поимите кружница и круг ги дефиниравме како множества од точки во рамнината, кои имаат точно утврдени својства. Во геометријата секое множество од точки во рамнината се вика **рамнинска геометриска фигура**. Затоа ќе велиме геометриски фигури, наместо рамнински геометриски фигури. Значи, секоја кружница и секој круг е геометриска фигура.

Основните поими точка, права и рамнина се геометриски фугури, наречени основни геометриски фигури. Рамнината означена со Σ е множество чии елементи се точки кои ќе ги означуваме со буквите $A, B, C, D....$ Секоја права е множество точки кое е подмножество од рамнината. Правите ќе ги означуваме со буквите $a, b, c, p, q, r...$ Секоја точка може се смета како рамнинска фигира – едноелементно множество.

При дефинирањето на секоја геометриска фигура постапуваме исто како и при дефинирањето на кружницата и кругот - ги наведуваме својствата на точките од кои е составена соодветната фигура.

Ако една точка припаѓа на множеството точки од дадена права, велиме дека **точката лежи на правата**, а исто така и дека **правата минува низ точката**. Ако една точка A лежи на права a, тоа се означува со $A \in a$. Точки што лежат на иста права се нарекуваат **колинеарни точки**, додека прави што минуваат низ иста точка се нарекуваат **конкурентни прави**. Претходните четири поими се изведени поими.

Задачи

1. Еден странец го прашал Борче, што означува зборот „локва“. Борче одговорил: „Локва е многу мало езеро“. Странецот, бидејќи не знаел што значи и зборот езеро, прашал: „А што е тоа езеро?“. Борче на тоа прашање одговорил: „Езеро - тоа е голема локва“. Дали странецот можел да разбере од одговорите на Борче, што означува зборот „локва“? Дадените објаснувања за локва и езеро велиме доведуваат до „вртење во круг“.

2. На прашањето: „Што е квадрат?“, Марија одговорила: „Квадрат е правоаголник со складни страни“. При каков одговор на прашањето: „А што е правоаголник?“, ќе се дојде до „вртење во круг“?

3. Наведи други примери, при кои се доаѓа до вртење во круг.

4. Именувај неколку познати геометриски фигури.

7.2. Аксиоматика на рамнинската геометрија

Основни и изведени тврдења

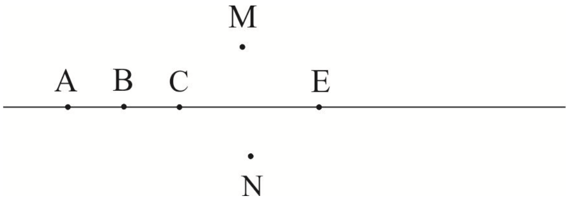
При изградбата на соодветните делови од математиката, односно на математичките модели се тргнува од основни поими, од кои потоа се изведуваат нови поими. За сите тие поими се искажуваат нивни одредени својства и тврдења во чија точност се уверуваме по пат на проверка, правење цртежи, извршување одредени мерења или по пат на логичко расудување користејќи својства и тврдења чија вистинитост е претходно утврдена. Слично како и при воведувањето на поимите, неминовно ќе дојдеме до некои појдовни својства и тврдења, чија точност не може да се утврди со користење на други поедноставни својства и тврдења. Таквите својства и тврдења, се претпоставува дека се вистинити и тие се нарекуваат **основни својства** или **тврдења**, односно **аксиоми**.

Својствата и тврдењата чија вистинитост се утврдува по пат на аргументирано логичко расудување, користејќи притоа својства и тврдења чија вистинитост е претходно утврдена е нарекуваат **изведени својства** или **тврдења**, односно **теореми**. Образложението за утврдувањето вистинитоста на одредена теорма се вика **доказ**.

Заемен однос на точка и права

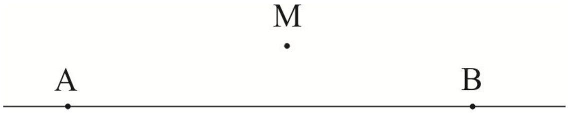
При изградбата на рамнинската геометрија, покрај основните поими се претпоставува дека за нив се точни одредени следните аксиоми, означени со $\mathbf{A_к}$.

$\mathbf{A_1}$. На секоја права лежат безброј многу точки (цртеж 2).



Цртеж 2

$\mathbf{A_2}$. Постојат барем три точки што не лежат на иста права (цртеж 3).



Цртеж 3

$\mathbf{A_3}$**.** Низ кои било две различни точки минува една единствена права (цртеж 3).

Зборовите „една единствена“ означуваат исто што и „точно една“, или „една и само една“.

Од основните претпоставки, следува дека две точки A и B или се **различни** (пишуваме $A \neq B$) или **се совпаѓаат** ($A \equiv B$). Записот $A \equiv B$ означува дека A и B се две различни ознаки за иста точка.

Заемен однос на две прави

Каков е односот на две различни прави? За тој однос е точно следното изведено својство, односно теорема.

Теорема 1. Две различни прави не може да имаат повеќе од една заедничка точка.

Навистина, ако претпоставиме дека две различни прави a и b имаат две различни заеднички точки M и N, тогаш низ тие две точки би минувале не една, туку две различни прави. Но, тоа противречи на аксиомата A_3. Според тоа, правите a и b не можат да имаат повеќе од една заедничка точка.

Дефиниција 1. За две прави, кои имаат само една заедничка точка, велиме дека се **сечат**. За две различни прави a и c што немаат заеднички точки, велиме дека се **паралелни** и означуваме $a \| c$. За две прави велиме дека се **совпаѓаат** (**поклопуваат**), ако тие се еднакви како множества точки.

Од Теорема 1 и соодветните изведени поими, следува дека две прави или се совпаѓаат или се сечат или се паралелни.

A_4. Низ точка A што не лежи на дадена права a, минува единствена права c која е паралелна со правата a.

Растојание

Покрај основните поими точка, права и рамнина во изградбата на рамнинската геометрија се користи уште еден основен поим, а тоа е поимот **растојание**.

Растојанието меѓу две точки A и B го обележуваме со $\overline{AB}.$ За растојанието се претпоставуваат следните основни својства.

A_5. Растојанието од една точка A до друга точка B е позитивен број или нула, односно $\overline{AB} \geq 0.$ Тоа е позитивен број, ако точките се различни, и е нула ако тие се совпаѓаат; односно

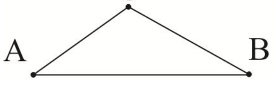
ако $A \neq B,$ тогаш $\overline{AB} > 0,$ и ако $A = B,$ тогаш $\overline{AB} = 0.$

A_6. За секои две точки A и B, растојанието од A до B е еднакво на растојанието од B до A, односно $\overline{AB} = \overline{BA}.$

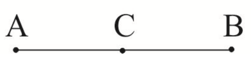
A_7. За кои било три точки A, B и C, растојанието од A до C не е поголемо од збирот на растојанијата $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, односно

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}.$$

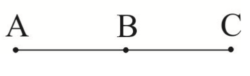
На цртеж 3а и цртеж 3б имаме дека $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC},$ и на цртеж 3в имаме дека $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$



Цртеж 3а



Цртеж 3б



Цртеж 3в

Користејќи ја A_7, ќе ја докажеме следната теорема.

Теорема 2. За кои било три различни точки A, B и C, растојанието $\overline{AC}$ е поголемо или еднакво на разликата од растојанијата $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, односно при услов $\overline{AB} > \overline{BC}$ важи неравенството

$$\overline{\mathrm{AC}} \geq \overline{\mathrm{AB}} - \overline{\mathrm{BC}}.$$

Навистина, согласно со аксиомата А7 имаме $\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{BC}$. Ако двете страни на неравенство ги намалиме за $\overline{BC}$, добиваме $\overline{AB} - \overline{BC} \leq \overline{AC} + \overline{BC} - \overline{BC}$, односно $\overline{\mathrm{AB}} - \overline{\mathrm{BC}} \leq \overline{\mathrm{AC}}$, што значи $\overline{\mathrm{AC}} \geq \overline{\mathrm{AB}} - \overline{\mathrm{BC}}$.

Отсечка, полурамнина и полуправа

Со помош на поимот растојание го дефинираме следниот изведен поим.

Дефиниција 2. За една точка S велиме дека **лежи меѓу** две точки A и B, ако тие три точки се различни и важи равенството

$$\overline{AS} + \overline{SB} = \overline{AB}.$$

Со помош на поимот лежи меѓу ќе ги искажеме следните две аксиоми.

А8. Ако една точка лежи меѓу две други точки, тогаш тие три точки се колинеарни. За кои било три колинеарни точки, точно една од нив лежи меѓу другите две.

Дефиниција 3. Множеството од две различни точки A и B и сите точки што лежат меѓу нив, со вика **отсечка** и се означува со $[AB]$.

Точките A и B се викаат **крајни точки**, а секоја точка што лежи меѓу нив, се вика **внатрешна точка** на отсечката $[AB]$.

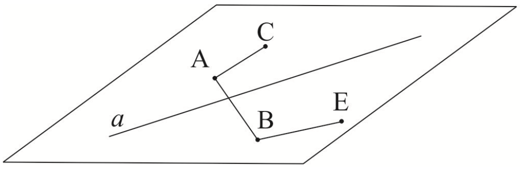
Две отсечки или отсечка и права што имаат точно една заедничка точка, велиме дека се **сечат** .

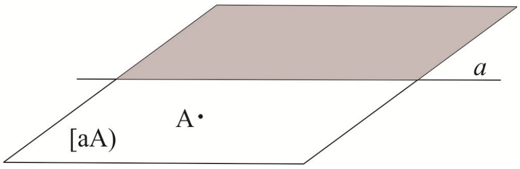
А9. За секоја права a, множеството точки од рамнината е еднакво на $M_1 \cup a \cup M_2$, каде што M_1 и M_2 се дисјункни подмножества од рамнината кои немаат заеднички точки со правата a и за кои е точно дека за секои точки A, C од M_1 и B, E од M_2, отсечката $[AB]$ ја сече, додека отсечките $[AC]$ и $[BE]$ не ја сечат правата AB.

Дефиниција 4. Секое од множествата, односно деловите од рамнината $M_1 \cup a$ и $a \cup M_2$ се нарекува **полурамнина со гранична права** (**граница или раб**) a. (цртеж 4.)

Според тоа, секоја права a ја дели рамнината на точно две полурамнини со гранична права a. Секоја од тие полурамнини е наполно определена со правата a

и една точка А која не лежи на *a*. (цртеж 5.) Таква полурамнина ја означуваме со [*aA*).





Цртеж 4 Цртеж 5

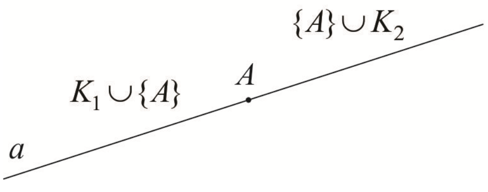
Следното својство е аналогија на аксиомата А9.

Теорема 3. За секоја точка *A* од една права а, множеството точки од правата е еднакво на $K_1 \cup \{A\} \cup K_2$, каде што K_1 и K_2 се дисјункни подмножества од правата што не ја содржат точката *A* и за кои е точно дека за секои точки *B*, *E* од K_1 и *C*, *T* од K_2, отсечката [*BC*] ја содржи, додека отсечките [*BE*] и [*CT*] не ја содржат точката *A*.

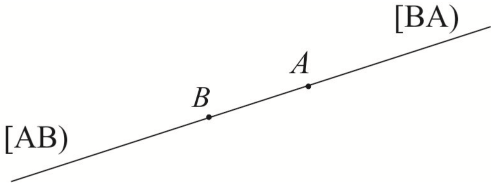
Навистина, од тоа што во рамнината постојат три неколинеарни точки, следува дека низ точката *A* минува права *c* која ја дели рамнината на две полурамнини. Точките *B* и *C* се наоѓаат во различни полурамнини, па според тоа отсечката [*BC*] ја сече праваt *a* во точката *A*, па според тоа [*BC*] ја содржи *A*. Од друга страна, точките *B*, *E* и *C*, *T* припаѓаат во иста полурамнина, па според тоа не ја сечат правата *a*, од што следува дека не ја содржат *A*.

Дефиниција 5. Секој од множествата, $K_1 \cup \{A\}$ и $\{A\} \cup K_2$ од Теорема 3, се нарекува **полуправа со почеток во точката** А. Тие полуправи се нарекуваат **составни** (**спротивни**) полуправи. (цртеж 6.)

Според тоа секоја точка *A* што лежи на дадена права, ја дели таа права на две полуправи со заеднички почеток *A*. Секоја од тие полуправи е наполно определена со точката *A* и уште една точка од дадената права различна од точката *A*. Ако *B* е точка од полуправата $K_1 \cup \{A\}$, тогаш таа се означува со [*AB*). Слично, се означува и полуправата $\{A\} \cup K_2$. Слично, како што две различни точки определуваат единствена права, така две различни точки *A* и *B* определуваат точно две полуправи [*AB*) и [*BA*) (цртеж 7.)



Цртеж 6



Цртеж 7

Од дефинициите на поимите отсечка и полуправа, следува дека за секои две различни точки A и B, отсечката $[AB]$ е еднаква на пресекот на полуправите $[AB)$ и $[BA)$.

Последнта аксиома во изградбата на рамнинската геометрија е следната.

A₁₀. На секоја полуправа $[OX)$ постои една единствена точка A која се наоѓа на дадено растојание r од нејзиниот почеток O (цртеж 8).

Оттука пак, следува следната теорема.

Теорема 4. На дадена права p постојат точно две точки A_1 и A_2, кои се наоѓаат на дадено растојание r од една точка O на таа права (цртеж 9).

Цртеж 8

Цртеж 9

Растојанието $\overline{AB}$ меѓу крајните точки на отсечка $[AB]$ се вика **должина на отсечката** $[AB]$. Должините на отсечките ги одредуваме со мерење. За таа цел избираме некоја отсечка $[MN]$, за која земаме, на пример, дека има должина $1(cm)$, односно $\overline{\mathrm{MN}} = 1(cm)$. Така на цртеж 10 должината на отсечката $[AB]$ е $4(cm)$, односно $\overline{AB} = 4(cm)$.

Цртеж 10

Цртеж 11

Внатрешната точка S на една отсечка, чии растојанија до нејзините крајни точки се еднакви, се вика **средна точка** или **средина** на таа отсечка (цртеж 11).

Дефиниција 6. За две отсечки што имаат еднакви должини, велиме дека се **еднакви** или **складни**.

Две отсечки со должини a и c може да се споредуваат (преку нивните должини) и притоа точна е само една од следниве три можности: $a = c$, $a < c$ или $a > c$.

Аксиомата A₁₀ овозможува цртање на еднакви отсечки само со помош на линијар и шестар, како и извршување на графички операции со отсечки. Цртањето на дадена геометриска фигура само со помош на линијар и шестар се вика **конструкција** на таа фигура.

Задачи

1. Кои точки на цртежот 2 и припаѓаат на правата p, а кои не и припаѓаат? Запиши го тоа симболички.

2. Колку криви линии можат да се повлечат низ две точки A и B? А колку прави минуваат низ тие две точки?

3. Колку прави минуваат низ една дадена точка?

4. Точно ли е дека за секоја точка постојат прави:
а) што минуваат низ неа **б)** што не минуваат низ неа?

5. Дали секои:
а) две дадени точки се колинеарни **б)** три дадени точки се колинеарни?

6. Колку прави определуваат три дадени неколинеарни точки?

7. Познато е растојанието $\overline{AB} = 7cm.$ Колкаво е растојанието $\overline{BA}$?

8. За три точки A, B, C познато е дека $\overline{AB} = 5cm$ и $\overline{AC} = 7cm.$ Дали може ли растојанието $\overline{BC}$ да биде еднакво на:
а) 12 *cm* **б)** 5 *cm* **в)** 13 *cm* **г)** 2 *cm*?

9. За растојанијата определени од точките A, B, C и D важи $\overline{AB} = 4cm,$ $\overline{CB} = 2cm$ и $\overline{AD} = 7cm.$ Пресметај ги растојанијата $\overline{BC}$, $\overline{CC}$, $\overline{BA}$, $\overline{BB}$ и $\overline{DA}.$

10. Кои геометриски поими се користени во дефиницијата на поимот „лежи меѓу“?

11. Што може да се каже за положбата на различните точки K, S и M, ако $\overline{KS} + \overline{KM} = \overline{SM}$? Која од тие точки лежи меѓу другите две?

12. Точката S лежи меѓу точките A и B, а точката M лежи меѓу точките S и B. Што можеш да кажеш за точките A, B, S и M. Дали тие се колинеарни?

13. Како се расположени точките A, B и M, ако е $\overline{BM} + \overline{BA} = \overline{AM}$?

14. Дали се различни полуправите $[AB)$ и $[BA)$?

15. Дали можат две полуправи да имаат:
а) само една заедничка точка **б)** само две заеднички точки?

16. Дадени се три различни точки. Колку отсечки тие определуваат?

17. На колку делови се разделува отсечката $[AB]$ од:
а) две различни нејзини внатрешни точки
б) три различни нејзини внатрешни точки?

18. Каква фигура претставува пресекот на полуправите $[AB)$ и $[BA)$?

19. Кое тврдење се вика аксиома, а кое теорема?

20. Кои од следниве искази се аксиоми, кои теореми, а кои дефиниции?

а) Низ една точка минуваат бесконечно многу прави.

б) Ако една права минува низ две различни точки од една рамнина, тогаш целата права лежи во рамнината.

в) Низ три различни точки минуваат една или три прави.

г) Надвор од една права лежат бесконечно многу точки.

д) Две прави се сечат, ако тие имаат само една заедничка точка.

7.3. Геометриски фигури

Кружница и круг

Во првиот дел ги дадовме дефинициите на кружница и круг користејќи го основниот поим растојание. Ќе спомнеме уште неколку поими поврзани со нив и неколку својства без докази.

Отсечка чии крајни токи се точки од дадена кружница се вика **тетива**. Тетива која го содри центарот се вика **дијаметар**. Често за отсечка чија една крајна точка е точка од кружницата а другата крајна точка е центарот се нарекува **радиус**. Овде се користи истиот термин и за отсечката и за нејзината должина. Истите поими се користат и за круг.

За дадена кружница $k(O,r)$ и дадена точка A од рамнината можни се следните случаи на нивна заемна положба.

1. Растојанието од O до A е еднакво на r (A **лежи** на кружницата);

2. Растојанието од O до A е помало од r (A **лежи** внатрешноста на кругот $K(O,r)$;

3. Растојанието од O до А е поголемо од r (A **лежи** надвор од кругот $K(O,r)$.

Множеството од сите точки чие растојание до O е помало од r, се вика **внатрешност** на кругот $K(O,r)$. Така, секој круг $K(O,r)$ е еднаков на унијата од неговата внатрешност и кружницата $k(O,r)$.

Дефиниција 1. Дадена фигура се вика **конвексна**, ако таа ја содржи секоја отсечка, чии крајни точки лежат на неа.

Секој круг е конвексна, додека секоја кружница не е конвексна фигура.

Рамнината, правите, полуправите и отсечките се конвексни фигури.

За дадена кружница $k(O,r)$ и дадена права а во рамнината можни се следните случаи на нивна заемна положба.

1. Правата a и кружницата немаат заеднички точки.

2. Правата a и кружницата имаат точно една заедничка точка. Во тој случај, правата се вика **тангента** на кружницата (**тангента** на кругот $K(O,r)$).

3. Правата a и кружницата имаат точно две заеднички точки. Во тој случај, велиме дека правата и кружницата се **сечат** во тие точки.

За две кружници во рамнината можни се следните случаи на нивна заемна положба.

1. Тие немаат заеднички точки и притоа:

- Имаат исти центи и различни радиуси (се викаат **концентрични**)

- Немаат исти центри (се викаат **ексцентрични**).

2. Тие имаат точно една заедничка точка (се вели дека се **допираат**).

3. Тие имаат точно две заеднички точки (се вели дека се **сечат**).

Секои две различни точки од дадена кружница ја делат кружницата на два дела, секој од кои се вика **кружен лак**.

Агол. Видови агли

Поимот агол го воведуваме на следниот начин.

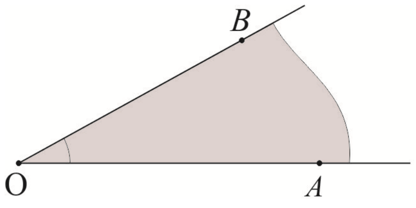
Слично како што секоја права ја дели рамнината на две полурамнини и две различни полуправи [*OA*) и [*OB*) со заеднички почеток *O* ја делат рамнината на два дела, првиот од нив, означен со K, е пресек на полурамнините [*aA*) и [*cB*), каде што $a = OA$, $c = OB$, додека вториот дел е множеството од сите точки во рамнината што не се во K.

Дефиниција 2. За две различни полуправи [*OA*) и [*OB*) со заеднички почеток *O*, унијата од тие полуправи и еден од претходно споменатите делови од рамнината се нарекува **агол** и се означува со $\angle AOB$.

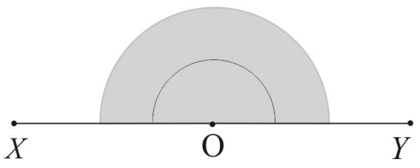
Полуправите *OA* и *OB* се викаат **краци на аголот**, нивниот заеднички почеток О се вика **теме на аголот**, а множеството од сите негови точки што не лежат на краците се вика **внатрешна област на аголот** (цртеж 1).

Очигледно е дека две различни полуправи со заеднички почеток, определуваат два агла со заеднички краци, едниот од кои е конвексна фигура. Во зависност каква е областа на аголот, конвекнсна или неконвексна, тој се нарекува **конвексен** или **неконвексен** (**конкавен**) агол. Според тоа, еден агол наполно определен со две различни полуправи со заеднички почеток и една точка што не лежи на нив.

Дефиниција 3. Агол, чии краци се две составни (спротивни) полуправи, се вика **рамен агол** (цртеж 2).

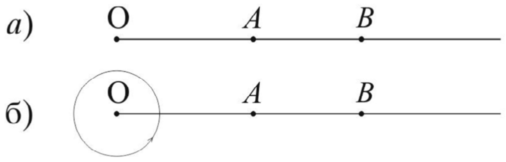


Цртеж 1

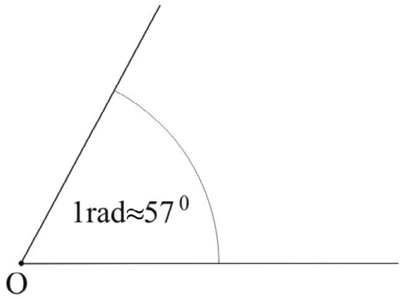


Цртеж 2

Во специјален случај велиме дека и две полуправи (*OA* и *OB* со заеднички почеток), кои се поклопуваат (цртеж 3) исто така определуваат два агла. Внатрешната област на едниот од нив е празно множество и тој се нарекува **нула агол** (цртеж 3а), додека деугиот од тие два е еднаков на целата рамнина и се вика **полн агол** (цртеж 3б).



Цртеж 3



Цртеж 4

Два агла, кои со „поставување еден врз друг“ можат да се доведат до поклопување, односно да им се поклопат краците и нивните внатрешни области, се викаат **складни** или **еднакви агли**. Ако, пак, не може да се доведат до поклопување, тогаш велиме дека едниот е помал (или дел) од другиот. Значи, аглите може да ги споредуваме. Велиме дека секој агол има точно одредена **големина**. Сите рамни агли се еднакви меѓу себе. Потоа сите полни агли се еднакви, а исто така и сите нула агли се еднакви.

Дефиниција 4. Полуправа *OS*, која го разделува даден агол на два складни агли, се вика **симетрала** (бисектриса) на аголот.

Аглите можат да бидат разделени и на поголем број складни делови. Да го разгделиме рамниот агол на 180 складни агли. Големината на секој од тие агли усвоено е да се вика **аголов степен**, или кратко само степен и се означува со 1°. Тој агол се прифаќа за единица мерка за мерење големината на аглите. Очигледно е дека нула аголот има големина 0°, рамниот агол има големина 180°, а полниот агол има големина 360°.

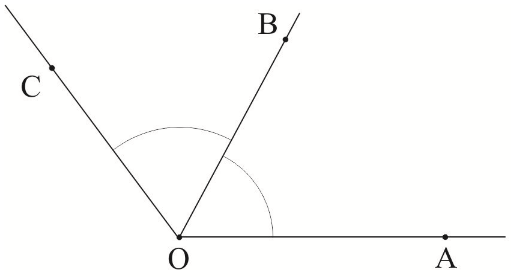
Во математиката освен степен многу често се користи и друга единица за мерење на аглите. Нека е дадена кружница $k(O,r)$. Нејзината должина е еднаква на $2\pi r$. Да побараме таков агол α со теме во *O*, кој отсекува кружен лак со должина еднаква на радиусот *r*. Тој агол (во степени) ќе го добиеме кога 360 ќе го поделиме со 2π. На тој начин за бараниот агол α добиваме дека има приближно 57^0. Овој агол α се зема за единица мерка наречена **радијан**. Значи $\alpha = 1rad$ (цртеж 4). Вообичано е ознаката за радијан „rad“ да не се пишува, на пример, $360^0 = 2\pi,\ 180^0 = \pi,\ 90^0 = \frac{\pi}{2}$, итн.

Агол чие теме е центарот на дадена кружница се вика **централен агол над тетивата** која се наоѓа во тој агол, а чии крајни точки се пресечните точки на краците од тој агол со кружницата.

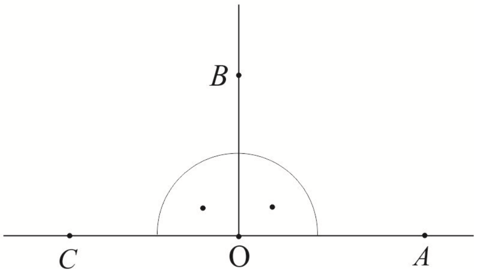
На цртеж 5 нацртани се два агла $\angle AOB$ и $\angle BOC$, кои имаат заедничко теме и еден заеднички крак *CB*, кој е нивен пресек, $\angle AOB \cap \angle BOC = [OB)$. Таквите два агла се викаат **соседни агли**, а аголот $\angle AOC$ е нивен **збир**.

Дефиниција 5. Два соседни агли, на кои различните краци им се составни полуправи, се викаат **напоредни агли**.

Во општ случај два напоредни агли се нееднакви, но во специјален случај тие можат да бидат и едкакви. Такви се напоредните агли $\angle AOB$ и $\angle BOC$ на цртеж 6.



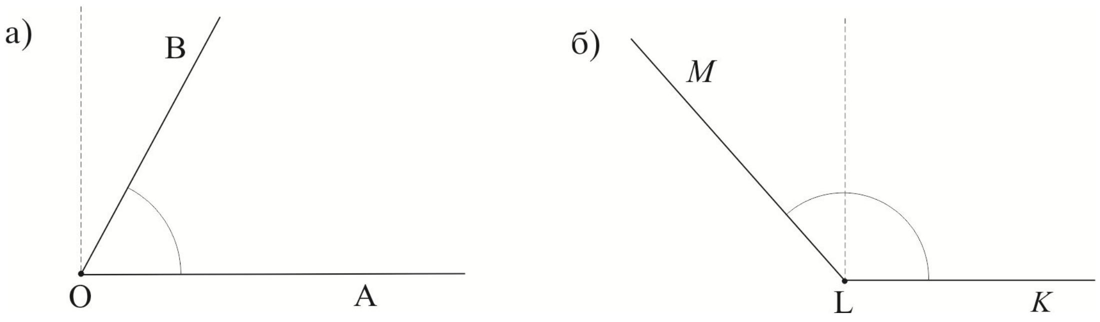
Цртеж 5



Цртеж 6

Дефиниција 6. Агол, кој е еднаков на својот напореден агол, се вика **прав агол**. Очигледно е дека сите прави агли се еднакви и имаат големина 90^0.

Дефиниција 7. Секој агол што е помал од правиот агол, се вика **остар агол**, а секој агол што е поголем од правиот агол и е помал од рамниот агол се вика **тап агол** (цртеж 7а и цртеж 7б).



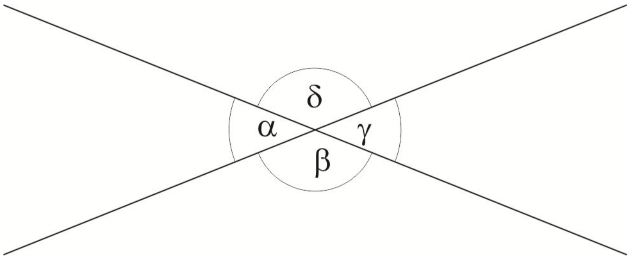
Цртеж 7

Ако два агла имаат, едниот α, а другиот β степени и ако е $\alpha+\beta=90^0$, тогаш такви два агли се викаат **комплементни агли** и за едниот од нив велиме дека е **комплемент** на другиот.

Ако за аглите α и β важи $\alpha+\beta=180^0$, тогаш тие се викаат **суплементни агли** и секој од нив е **суплемент** на другиот.

Јасно е дека за даден остар агол α неговиот комплемент е $90^0-\alpha$, а неговиот суплемент ќе биде $180^0-\alpha$. Очигледно дека секои два напоредните агли се и суплементни.

Две прави *a* и *b* што се сечат (цртеж 8), образуваат четири конвексни агли (различни од рамниот) α, β, γ и δ. Од нив може да се образуваат шест пара различни агли (α,β), (β,γ), (γ,δ), (δ,α), (α,γ) и (β,δ). Првите четири пара агли знаеме



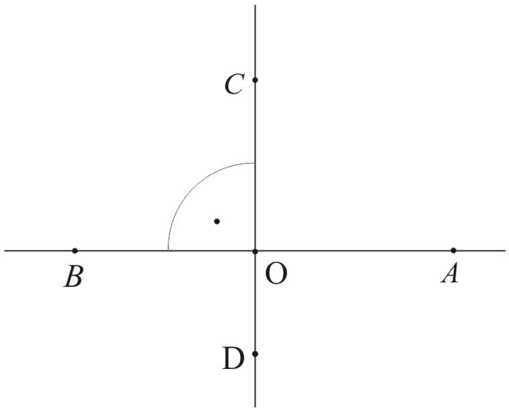
Цртеж 8

дека се викаат **напоредни агли**, а за паровите (α,γ) и (β,δ) велиме дека се **накрсни агли**. Од цртеж 8 забележуваме дека накрсните агли α и γ имаат заедничко теме, а краците на едниот од нив се составни полуправи на полуправите, што се краци на другиот од нив. Тоа исто важи и за другиот пар накрсни агли β и δ (цртеж 8).

Дефиниција 8. Два агла, кои имаат заедничко теме и краците на едниот агол се составни на краците на другиот агол, се викаат **накрсни**.

Да ги разгледаме накрсните агли α и γ (цртеж 8). Од цртежот гледаме дека аголот β е напореден и на α и на γ. Според тоа, аголот β го надополнува и аголот α и аголот γ до рамен агол. Оттука следува дека аглите γ и α се еднакви. Значи, накрсните агли се еднакви меѓу себе.

На цртеж 9 нацртани се две прави *AB* и *CD*, кои се сечат во точката *O*. Тие образуваат четири конвексни агли, од кои гледаме дека ∠AOC е прав. Какви се другите агли? И тие се прави. Зошто?



Цртеж 9

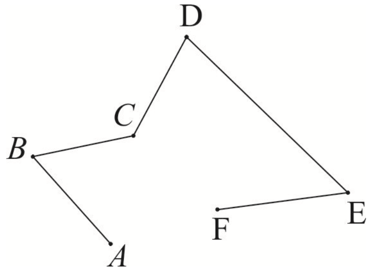
Дефиниција 9. Две прави, кои се сечат и притоа образуваат прави агли, се викаат **заемно нормални**

Велиме уште дека правата *AB* е **нормална** на правата *CD*, и обратно. Тоа симболички го запишуваме: $AB \perp CD$ односно $CD \perp AB$.

Наместо „нормална права“, често велиме **нормала**; а наместо „заемно нормални прави“ велиме **нормални прави.**

Искршена линија. Многуаголник

На цртеж 10 нацртана е геометриска фигура *ABCDEF*, која претставува унија од отсечките *AB*, *BC*, *C*D, *DE* и *EF*, од кои никои две соседни отсечки не лежат на иста права. Таквата фигура се вика **искршена линија**.

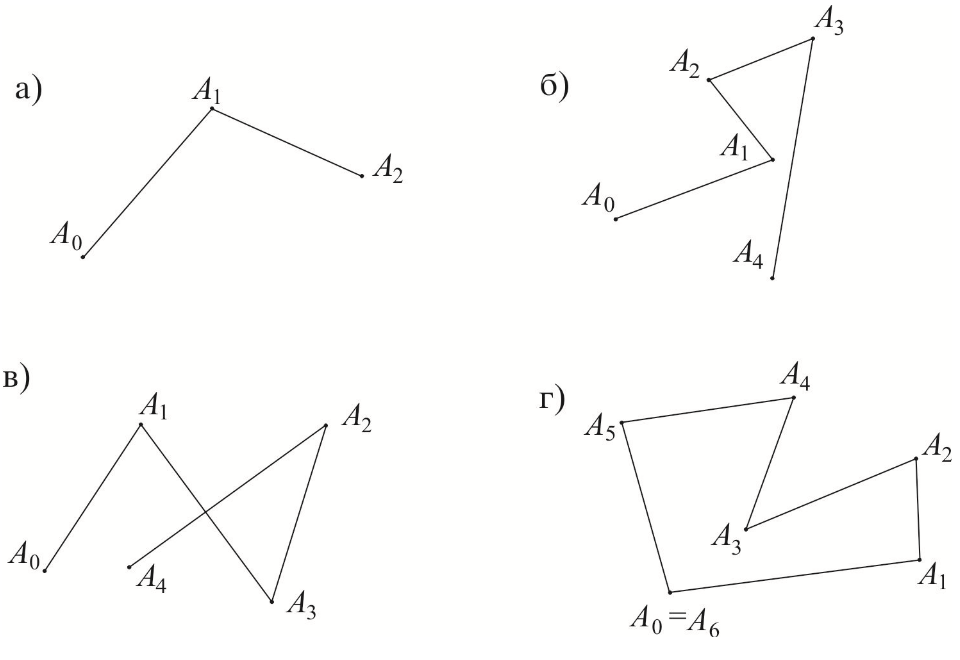


Цртеж 10

Отсечките *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, се викаат **страни** на искршената линија, точките *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F* се викаат **темиња**, а точките *A* и *F* (цртеж 10) - **крајни точки** на искршената линија. Две темиња, кои и припаѓаат на иста страна на искршената линија, се викаат **соседни темиња**; а две страни со заедничко теме, се викаат **соседни страни** на искршената линија.

Искршена линија, кај која кои било две нејзини несоседни страни немаат заеднички точки, се вика **проста искршена линија**. На пример искршените линии на цртеж 11 под а), б), г) се прости, а искршената линија на цртеж 11 под в) не е проста, бидејќи нејзините несоседни страни A_1A_2 и A_3A_4 се сечат.

Ако крајните точки на една искршена линија се совпаѓаат (цртеж 11 под г)) велиме дека таа е **затворена** искршена линија, а за искршените линии на цртеж 11 под а) ,б), в), велиме дека се **отворени** (незатворени).



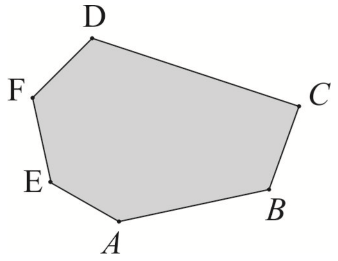
Цртеж 11

Збирот од должините на сите страни на искршената линија, се вика **должина на искршената линија**.

На цртеж 12 нацртана е една проста, затворена искршена линија. Разгледувајќи го цртежот заклучуваме дека: таа ги разделува точките од рамнината (што не и припаѓаат на неа) на две **области** (дела) - **внатрешна** и **надворешна**. Самата искршена линија претставува **заедничка граница** односно пресек на тие две области.

Дефиниција 10. Секоја фигурата што е образувана од една проста затворена искршена линија и нејзината внатрешна област, се вика **многуаголник**.

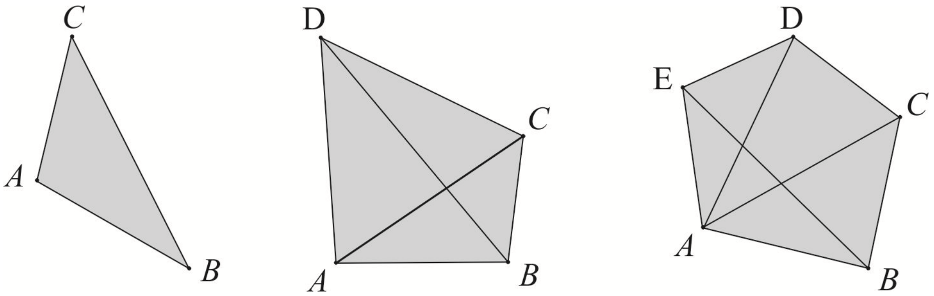
Точките од искршената линија се викаат **гранични точки**, а точките од внатрешната област – **внатрешни точки** на многуаголникот. Темињата и страните на искршената линија се викаат **темиња** и **страни** на многуаголникот. Многуаголникот симболички го означуваме со именување на сите негови темиња *ABC*, *ABCD*, *ABCDE* (цртеж 13).



Цртеж 12

Две темиња, што и припаѓаат на иста страна, се викаат **соседни темиња**, а две страни со заедничко теме се викаат **соседни страни**.

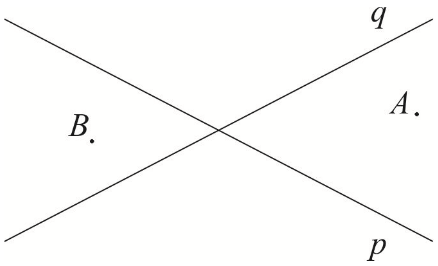
Во секој многуаголник бројот на темињата е еднаков на бројот на страните. Според бројот на страните, односно темињата, многуаголникот може да биде триаголник, четириаголник, петаголник, шестагоник, итн. (цртеж 13).



Цртеж 13

Отсечката, што сврзува кои било две несоседни темиња на многуаголникот, се вика **дијагонала**. Петаголникот има пет дијагонали, четириаголникот - две, а триаголникот нема ниту една дијагонала. Зошто? (цртеж 13).

Збирот од должините на сите страни на многуаголникот, се вика **периметар на многуаголникот**.



Цртеж 14

Задачи

1. На цртеж 14 повлечени се две прави p и q што се сечат и означени се две точки A и B. Направи ист таков цртеж и шрафирај ја фигурата, која е пресек на полурамнините:

а) $[pA)$ и $[qB)$ **б)** $[pA)$ и $[qA)$ **в)** $[pA)$ и $[pB)$ **г)** $[qA)$ и $[pB)$.

2. Која фигура се вика конвексна, а која неконвексна?

3. Нацртај две прави AB и CD, кои се сечат во точката S. Колку конвексни агли гледаш на цртежот? Запиши ги.

4. Нацртај еден произволен агол и конструирај го нему напоредниот агол. Колку такви агли има? Какви се тие агли?

5. Нацртај два различни агли, а потоа конструирај ги нивните накрсни агли.

6. Повлечи нормала кон дадена права p, која да минува низ точката A, ако:

а) $A \in p$ **б)** $A \notin p$.

7. Каков централен агол му одговара на дијаметарот на кружницата?

8. Нацртај искршена линија со најмал број на страни:

а) отворена **б)** затворена.

9. Колку најмалку темиња може да има:

а) конвексен **б)** неконвексен многуаголник?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Три различни точки може да определуваат една или три прави. Покажи со помош на цртеж дека четири различни точки во рамнината може да определуваат една, четири или шест прави.

2. За три различни колинеарни точки A, B и C, познато е дека $\overline{AC} = 12cm$ и $\overline{BC} = 7cm$. Колкаво може да биде растојанието $\overline{AB}$? За секој можен случај направи цртеж.

3. Дали постојат точки A, B и C, такви што важи:

а) $\overline{AC} < 0$ **б)** $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ **в)** $\overline{AC} \geq \overline{AB} + \overline{BC}$

г) $\overline{AB} > \overline{AC} + \overline{CB}$ **д)** $\overline{AB} \leq 0$?

4. Дали е точно дека ако точката M лежи меѓу точките A и B, тогаш тие три точки не се колинеарни?

5. Дали точките K, L и M се колинеарни ако:

а) $\overline{KL} = 7cm$, $\overline{KM} = 5cm$ и $\overline{LM} = 4cm$

б) $\overline{KL} = 5cm$, $\overline{KM} = 9cm$ и $\overline{LM} = 4cm$?

6. Со колку и со кои точки е еднозначно определена попуправа?

7. Каква фигура може да биде унијата на две полуправи што лежат на иста права? Покажи го тоа на цртеж.

8. Дадена е права p и точка $A \in p$. Што претставува множеството точки од правата p, чие растојание до точката A е:

а) не помало од $3cm$ **б)** еднакво на $3cm$ **в)** помало или еднакво од $3cm$?

9. Отсечката AB има должина $12cm$. Дали точката M лежи на отсечката $[AB]$, ако:

а) $\overline{AM} = 7cm$ и $\overline{MB} = 5cm$ **б)** $\overline{AM} = 9cm$ и $\overline{MB} = 6cm$ **в)** $\overline{AM} = \overline{MB}$?

10. Точките A, B и C лежат на една права по наведениот редослед. Точката S е средина на отсечката AB, а точката T е средина на отсечката BC. Ако $\overline{AB} = a$ и $\overline{BC} = b$, колкава е должината на отсечката ST?

11. Колку прави агли образува големата стрелка на часовникот за

а) 1 час **б)** 1 ден **в)** 1 месец?

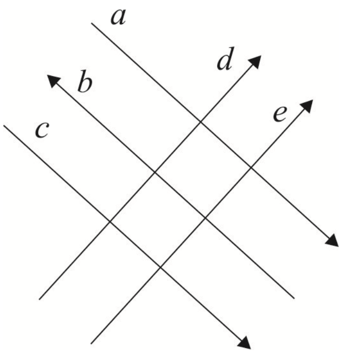
12. Колку радијани има агол од 60^0?

13. Колку дијагонали може да се повлечат низ едно теме на конвексен:

а) четириаголник **б)** петаголник **в)** седумаголник?

14. Кои од полуправите на цртеж 1 се истонасочени, а кои се спротивно насочени, ако $a \parallel b \parallel c$ и $d \parallel e$.

15. Каква фигура е
а) пресекот **б)** унијата
на две истонасочени полуправи кои лежат на една иста права?



Цртеж 1

16. Каква фигура е
а) пресекот **б)** унијата
на две спротивно насочени полуправи кои лежат на една иста права?

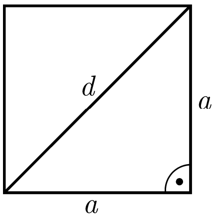
8. ПЛОШТИНА И ПЕРИМЕТАР НА РАМНИНСКИ ФИГУРИ

8.1. Поим за плоштина. Плоштина и периметар на паралелограм

Плоштина на многуаголник е мерка за големината на внатрешниот дел од рамнината што ја зафаќа многуаголникот. Пресметувањето на таа големина е всушност определување на бројот на единечни квадрати кои го пополнуваат внатрешниот дел на многуаголникот без преклопување, притоа складните фигури имаат иста плоштина.

Плоштина и периметар на квадрат и правоаголник

Плоштината на квадрат со страна a е $\boxed{P=a^2}$. Периметарот на квадрат со страна a е $\boxed{L=4a}$.



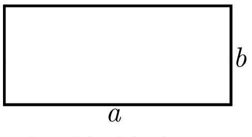
Пример 1. Плоштината на квадрат со страна $a=3\,\mathrm{cm}$ е еднаква на $P=a^2=3^2=9\,\mathrm{cm}^2$, а неговиот периметар е $L=4\cdot3=12cm$. ♦

Пример 2. За да ја одредиме плоштината на квадрат со дијагонала $d=5\,\mathrm{cm}$, прво треба да ја одредиме врската меѓу должината на страната и дијагоналата на квадрат, па од Питагоровата теорема имаме $d^2=a^2+a^2\Rightarrow d^2=2a^2$ од каде $a^2=\frac{d^2}{2}$, па $P=\frac{d^2}{2}=\frac{5^2}{2}=\frac{25}{2}=12{,}5\,\mathrm{cm}^2$. ♦

Според тоа може да заклучиме дека:

Плоштината на квадрат со дијагонала d се пресметува со формулата $\boxed{P=\frac{d^2}{2}}$.

Плоштината на правоаголник со страни a и b се пресметува со формулата $\boxed{P=ab}$. Периметарот на паралелограм со страни a и b се пресметува со формулата $\boxed{L=2(a+b)}$.



Пример 3. Плоштината на правоаголник со страни $a=7\,\mathrm{cm}$ и $b=4\,\mathrm{cm}$ е еднаква на $P=ab=7\cdot4=28\,\mathrm{cm}^2$, а неговиот периметар е $L=2\cdot(7+4)=22cm$. ♦

Задача 1. Пресметај го периметарот на правоаголник, ако неговите страни се однесуваат како $3:7$ а неговата плоштина е $756\,\mathrm{cm}^2$.

Решение. Заради $a:b=3:7$ имаме дека $a=3k$ и $b=7k$, каде k е коефициент на пропорционалноста. Тогаш имаме $ab=756$ и оттука

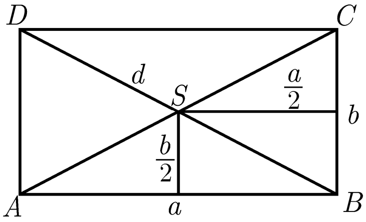
$3k\cdot 7k=756$, па $k^2=36$. Следува $k=6$ или $k=-6$. Случајот $k=-6$ отпаѓа затоа што $a=3k>0$. Значи, $k=6$, па $a=18\,\text{cm}$ и $b=42\,\text{cm}$ и $L=2(18+42)=120\,\text{cm}$. ♦

Задача 2. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголникот ако една негова страна е $1\,\text{dm}$, а другата е за $2\,\text{cm}$ помала од дијагоналата.

Решение. Нека $a=10\,\text{cm}$ и $b+2=d$. Од Питагоровата теорема имаме $a^2+(d-2)^2=d^2$ и оттука $4d=100+4$, па $d=26\,\text{cm}$. Значи, $b=24\,\text{cm}$, па периметарот е $L=2(10+24)=68\,\text{cm}$ а плоштината е $P=10\cdot 24=240\,\text{cm}^2$. ♦

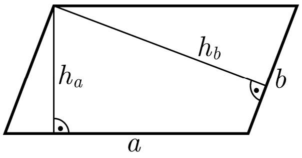
Задача 3. Во еден правоаголник пресекот на дијагоналите е за $4\,\text{cm}$ поблиску до поголемата отколку до помалата страна. Пресметај ја плоштината на правоаголникот, ако неговиот периметар е $56\,\text{cm}$. ♦

Решение. Нека $a>b$. Тогаш $\frac{a}{2}=4+\frac{b}{2}$, т.е. $a=8+b$. Уште важи $2a+2b=56$, т.е. $a+b=28$. Отука добиваме $8+2b=28$, па $b=10\,\text{cm}$.Значи $a=18\,\text{cm}$, па плоштината е $P=180\,\text{cm}^2$.♦



Плоштина и периметар на паралелограм

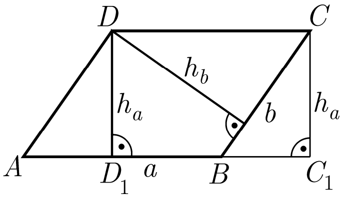
Плоштината P на паралелограм со страни a и b и висини спуштени кон нив h_a и h_b, соодветно, е еднаква на $\boxed{P=ah_a=bh_b}$.



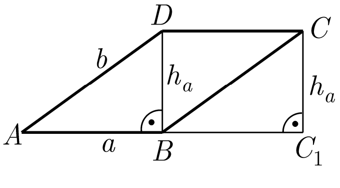
Доказ. Ќе докажеме дека $P=ah_a$.

Нека D_1 е подножјето на висината h_a спуштена од D.

а) Точката D_1 припаѓа на страната AB. Нека C_1 е подножјето на висината спуштена од C кон AB. Јасно, C_1 припаѓа на продолжението на AB. Тогаш триаголниците AD_1D и BC_1C се правоаголни и $\sphericalangle DAD_1=\sphericalangle CBC_1$, па следува дека и $\sphericalangle ADD_1=\sphericalangle BCC_1$. Притоа, $\overline{DD_1}=\overline{CC_1}=h_a$ и $\overline{AD}=\overline{BC}=b$, па следува дека $\Delta AD_1D\cong\Delta BC_1C$. Според тоа, $P_{AD_1D}=P_{BC_1C}$.



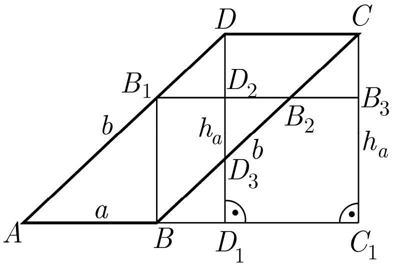
Сега, $P_{ABCD}=P_{AD_1D}+P_{D_1BCD}=P_{BC_1C}+P_{D_1BCD}=P_{D_1C_1CD}$. Од $\Delta AD_1D\cong\Delta BC_1C$ следува дека $\overline{AD_1}=\overline{BC_1}$, па четириаголникот D_1C_1CD е правоаголник со страни a и h_a, па неговата плоштина е ah_a. Конечно, $P_{ABCD}=P_{D_1C_1CD}=ah_a$.



б) Точката D_1 се совпаѓа со B.

Слично како во случајот а) добиваме дека $\Delta ABD\cong\Delta BC_1C$, па

$$P_{ABCD}=P_{ABD}+P_{BDC}=P_{BC_1C}+P_{BDC}=P_{BC_1CD}=ah_a.$$



в) Точката D_1 припаѓа на продолжението на страната AB.
Како и досега, нека C_1 е подножето на висината спуштена од C. Да повлечеме нормала во B на AB и нека B_1 е пресекот на таа нормала со првата AD. Јасно, точката B_1 припаѓа на отсечката AD. Од B_1 повлекуваме права p паралелна на AB, и нека $\{B_2\}=BC\cap p$, $\{B_3\}=p\cap CC_1$, $\{D_2\}=DD_1\cap BB_3$ и $\{D_3\}=DD_1\cap BB_3$. Според б) добиваме дека $P_{ABB_2B_1}=P_{D_1C_1B_3D_2}$, а бидејќи пресекот на двата четириаголници е триаголникот $D_2B_2D_3$ следува дека $P_{ABD_3D_2B_1}=P_{D_1C_1B_3B_2D_3}$. Слично како во а) добиваме дека $\Delta B_1D_2D\cong\Delta B_2B_3C$, па нивните плоштини се еднакви. Конечно,

$$P_{ABCD}=P_{ABD_3D_2B_1}+P_{D_3B_2D_2}+P_{B_1D_2D}+P_{DD_2B_2C}=$$
$$=P_{D_1C_1B_3B_2D_3}+P_{D_3B_2D_2}+P_{B_2B_3C}+P_{DD_2B_2C}=P_{D_1C_1CD}=ah_a.$$

Од оваа формула, добиваме дека плоштината на ромб со страна a и висина h е еднаква на $P=ah$. ♦

Периметарот на паралелограм со страни a и b се пресметува со формулата $\boxed{L=2(a+b)}$, а периметарот на ромб со страна a се пресметува со формулата $\boxed{L=4a}$.

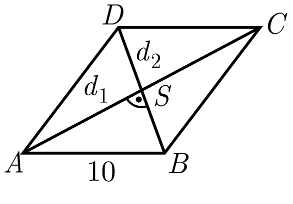
Пример 4. Плоштината на паралелограмот $ABCD$ ако $a=\overline{AB}=12\,\mathrm{cm}$ и $h_a=7\,\mathrm{cm}$ е еднаква на $P=a\cdot h_a=12\cdot 7=84\,\mathrm{cm}^2$.♦

Пример 5. Паралелограмот со плоштина $56\,\mathrm{cm}^2$ и страни $a=5,2\,\mathrm{cm}$ и $b=4,8\,\mathrm{cm}$ има висини $h_a=\frac{P}{a}=\frac{56}{5,2}=\frac{140}{13}\approx 10,77\,\mathrm{cm}$ и $h_b=\frac{P}{b}=\frac{56}{4,8}=\frac{35}{3}\approx 11,7\,\mathrm{cm}$ ♦

Задача 4. Две страни на паралелограмот се однесуваат како $3:4$, а неговиот периметар е 28. Одреди ги должините на страните на паралелограмот.

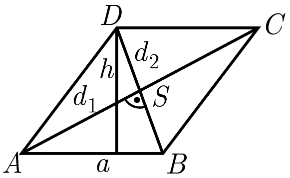
Решение. $a:b=3:4=k$, па $a=3k, b=4k$, каде k е коефициент на пропорционалноста и од $L=28=2(a+b)$ имаме $a+b=14$ т.е. $7k=14$, па $k=2$. Значи $a=6, b=8$. ♦

Плоштината на ромб со дијагонали d_1 и d_2 се пресметува со формулата $\boxed{P=\frac{d_1d_2}{2}.}$



Задача 5. Пресметај ја плоштината на ромб со страна $1\,\mathrm{dm}$ и една дијагонала $12\,\mathrm{cm}$.

Решение. Нека $d_2=12\,\mathrm{cm}$. Од правоаголниот триаголник ABS добиваме дека $\left(\frac{12}{2}\right)^2+\left(\frac{d_1}{2}\right)^2=10^2$ па $d_1=16\,\mathrm{cm}$. Плоштината е $P=\frac{d_1d_2}{2}=96\,\mathrm{cm}^2$. ♦



Задача 6. Висината на ромбот е $48\,\text{cm}$ а поголемата дијагонала $8\,\text{dm}$. Пресметај го периметарот на ромбот.

Решение. Значи $h = 48\,\text{cm}$, $d_1 = 80\,\text{cm}$ и нека a е страната на ромбот. Бидејќи $P = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$ добиваме $48a = \frac{80d_2}{2}$, т.е. $a = \frac{5}{6}d_2$.

Од правоаголниот триаголник ABS добиваме дека $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$, т.е. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$. Оттука добиваме $80^2 + d_2^2 = 4\frac{25}{36}d_2^2$, т.е. $\frac{16}{9}d_2^2 = 80^2$, па $d_2 = 60\,\text{cm}$.

Според тоа $a = \frac{5}{6}60 = 50\,\text{cm}$, па периметарот е $L = 4a = 200\,\text{cm}$. ♦

Задачи

1. Познато е дека:

а) Квадрат има плоштина $P = 36\text{cm}^2$. Одреди ги должините на страната и дијагоналата на квадратот.

б) Квадрат има периметар $L = 12\text{cm}$. Одреди ги должините на страната и дијагоналата на квадратот.

2. а) Даден е правоаголникот со плоштина $108dm^2$ и страна $a = 120\,\text{cm}$. Одреди ја должината на другата страна и дијагоналата на правоаголникот.

б) Даден е правоаголник со периметар 246cm и страна $b = 80\text{cm}$. Одреди ја должината на другата страна и дијагонала.

3. Пресметај ја плоштината на правоаголник впишан во кружница со радиус $12{,}5\,\text{cm}$ ако едната страна му е $7\,\text{cm}$.

4. Во квадрат со страна a впишан е друг квадрат чии темиња ја делат страната на првиот квадрат во однос $2:3$. Одреди го односот на плоштините на квадратите.

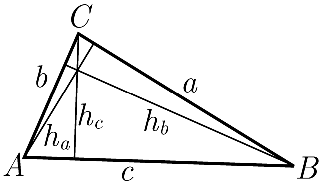
5. Даден е правоаголник $ABCD$ со страни $8cm$ и $6cm$. Со дијагоналата AC поделен е на два триаголници во кои се впишани кружници. Одреди го растојанието меѓу центрите на кружниците.

6. Одреди ја должината на страната b и односот на висинте во паралелограмот со периметар $124dm$ и страна $a = 12dm$.

7. Пресметај ја плоштината на ромб со помала дијагонала $6\,\text{cm}$ и радиус на впишаната кружница $24\,\text{mm}$.

8.2. Плоштина и периметар на триаголник

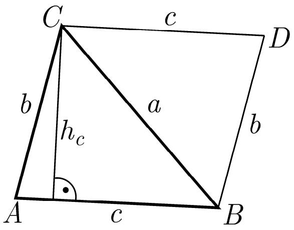
Плоштината P на триаголникот ABC со страни a, b, c и висини h_a, h_b, h_c спуштени кон нив, соодветно, е еднаква на $\boxed{P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}}$, а периметарот $\boxed{L = a + b + c}$.

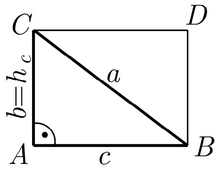


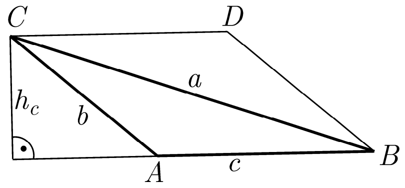
Доказ. Ќе докажеме дека $P=\frac{ch_c}{2}$. Другите равенства се докажуваат потполно аналогно.

Во зависност од тоа дали аглите кај A и B се остри (т.е. триаголникот е остроаголен) или еден од нив е прав или еден од нив е тап ги добиваме случаите како на цртежот.

Низ B повлекуваме права паралелна со AC и низ C повлекуваме права паралелна со AB. Нека пресечната точка на тие две прави е D. Четириаголникот $ABDC$ е паралелограм. Значи, $\overline{AB}=\overline{CD}$ и $\overline{AC}=\overline{BD}$. Бидејќи BC е заедничка страна следува дека $\Delta ABC\cong\Delta DCB$, па $P_{ABC}=P_{DCB}$. Значи, $P_{ABC}=\frac{P_{ABDC}}{2}=\frac{ch_c}{2}$. ♦







Пример 1. Плоштината на триаголникот со $b=7\,\text{cm}$ и $h_b=4\,\text{cm}$ е еднаква на $P=\frac{bh_b}{2}=\frac{28}{2}=14\,\text{cm}^2$. ♦

Плоштината на **рамностран триаголник** со страна a е $\boxed{P=\frac{ah}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$.

Нека a,b,c се страните а $\boxed{s=\frac{a+b+c}{2}}$ е полупериметарот на триаголник ABC.

Тогаш неговата плоштина P е еднаква на $\boxed{P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$. Оваа формула е позната како **Херонова формула**.

Пример 2. Плоштината на триаголникот со страни $a=5$, $b=4$ и $c=7$ е еднаква на

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{8(8-5)(8-4)(8-7)}=\sqrt{8\cdot3\cdot4\cdot1}=\sqrt{96}=4\sqrt{6},$$

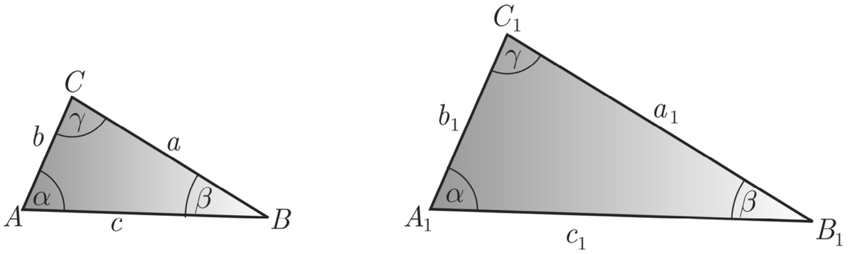
каде $s=\frac{5+4+7}{2}=8$. ♦

Нека s е полупериметарот, r радиус на впишаната кружница и P е плоштината на триаголник ABC. Тогаш $\boxed{P=rs}$.

Нека ABC е триаголник со страни a,b,c и радиус R на опишаната кружница околу него. Тогаш плоштината на триаголникот е еднаква на $\boxed{P=\frac{abc}{4R}}$.

Пример 3. За ΔABC со страни $a=4cm, b=6cm$ и $c=8cm$ радиусот на впишаната кружница е $r=\frac{P}{s}=\frac{\sqrt{9\cdot(9-4)\cdot(9-6)\cdot(9-8)}}{9}=\frac{\sqrt{15}}{3}cm$, а радиусот на опишаната кружница е $R=\frac{abc}{4P}=\frac{192}{12\sqrt{15}}=\frac{16\sqrt{15}}{15}cm$. ♦

Нека $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ каде $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$ и нека P и P_1 се плоштините на ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, соодветно. Тогаш $\frac{P}{P_1}=\frac{a^2}{a_1^2}=\frac{b^2}{b_1^2}=\frac{c^2}{c_1^2}$.



Пример 4. Плоштините на два слични триаголници се 15 и 18, а страната a на првиот е 5, тогаш соодветната страна a_1 на вториот триаголник е $a_1^2=\frac{a^2P_1}{P}=\frac{25\cdot 18}{15}=30$, па $a_1=\sqrt{30}$. ♦

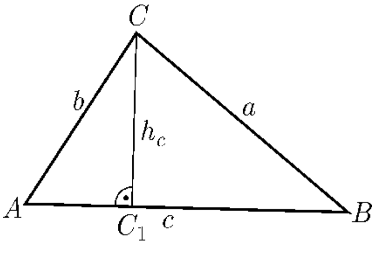
Задача 1. Периметарот на рамнокрак триаголник е $64\,\mathrm{cm}$, а разликата на кракот и основата е $11\,\mathrm{cm}$. Пресметај ја плоштината на триаголникот.

Решение. Нека a е основата а b кракот на траиголникот. Тогаш имаме $a+2b=64$ и $b-a=11$. Со собирање на овие равенства добиваме $3b=75$, па $b=25\,\mathrm{cm}$. оттука следува дека $a=14\,\mathrm{cm}$. Од Питагоровата теорема за висината добиваме $h=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{625-49}=24\,\mathrm{cm}$, па плоштината е $P=\frac{ah}{2}=168\,\mathrm{cm}^2$.

♦

Задача 2. Пресметај ја плоштината на триаголникот ако $a=73\,\mathrm{dm}$, $b=52\,\mathrm{dm}$ и $h_c=48\,\mathrm{dm}$.

Решение. Од Питагоровата теорема за ΔC_1BC и ΔAC_1C добиваме $\overline{C_1B}=\sqrt{a^2-h_c^2}=55\,\mathrm{dm}$ и $\overline{AC_1}=\sqrt{b^2-h_c^2}=20\,\mathrm{dm}$, па следува дека $c=75\,\mathrm{dm}$. Сега, плоштината е $P=\frac{75\cdot 48}{2}=1800\,\mathrm{dm}^2$. ♦



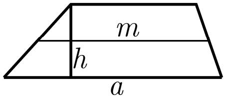
Задачи

1. Даден е триаголникот со страни $a=21, b=17$ и $c=10$. Одреди ги плоштината, висините, радиусот на впишаната и опишаната кружница и периметарот на триаголникот.

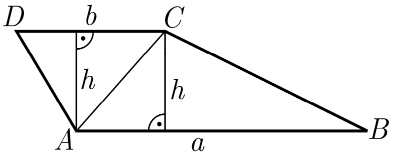
2. Даден е рамнокрак триаголник со основа a=10cm и крак b=13cm. Одреди ги плоштината, висините, радиусот на впишаната и опишаната кружница и периметарот на триаголникот.
3. Пресметај ја плоштината на триаголник ако две негови
страни имаат должини $27\,\mathrm{cm}$ и $29\,\mathrm{cm}$ а тежишната линија кон третата страна има должина $26\,\mathrm{cm}$.
4. Нека S е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC и нека $P_{\Delta ASB}=36\,\mathrm{cm}^2$, $P_{\Delta ASC}=40\,\mathrm{cm}^2$ и $P_{\Delta CSB}=68\,\mathrm{cm}^2$. Пресметај ги страните на триаголникот.
5. Страните на еден триаголник се $13\,\mathrm{cm}$, $14\,\mathrm{cm}$ и $15\,\mathrm{cm}$. Одреди го радиусот на кружницата со центар на средната по големина страна која ги допира другите две страни.

8.3. Плоштина на трапез, делтоид и трапезоид

Трапез е четириаголник со еден пар паралелни страни кои се нарекуваат основи на трапезот, а растојанието меѓу паралелните страни се вика висина на трапезот. Плоштина на трапез со основи a,b и висина h се пресметува со формулата $\boxed{P=\frac{(a+b)h}{2}}$. Должината на средната линија m на трапезот со основи a и b е еднаква на $\frac{a+b}{2}$, па плоштината на трапезот се пресметува со формулата $\boxed{P=mh}$.

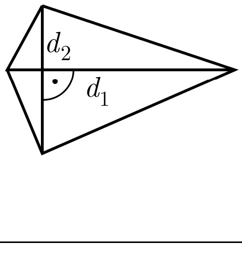


Ќе докажеме дека $P=\frac{a+b}{2}h$.
Нека $ABCD$ е трапез со основи a и b и висина h. Трапезот го делиме на два триаголници со дијагоналата AC. Тогаш $P=P_{ACD}+P_{ABC}=\frac{bh}{2}+\frac{ah}{2}=\frac{a+b}{2}h$. ♦



Пример 1. Плоштината на трапез со основи $a=4$, $b=8$ и висина $h=10$ е еднаква на $P=\frac{8+4}{2}10=60$. ♦

Плоштината на четириаголник со заемно нормални дијагонали d_1 и d_2 се пресметува со формулата $\boxed{P=\frac{d_1d_2}{2}}$.



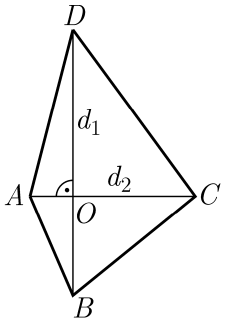
Навистина, за плоштината на четириаголникот $ABCD$ имаме

$$P = P_{ABO} + P_{BOC} + P_{COD} + P_{AOD} =$$

$$= \frac{\overline{AO}\cdot\overline{OB}}{2} + \frac{\overline{CO}\cdot\overline{OB}}{2} + \frac{\overline{CO}\cdot\overline{OD}}{2} + \frac{\overline{AO}\cdot\overline{OD}}{2} =$$

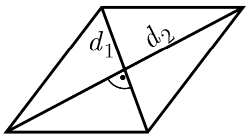
$$= \frac{\left(\overline{AO}+\overline{CO}\right)\cdot\overline{OB}}{2} + \frac{\left(\overline{AO}+\overline{CO}\right)\cdot\overline{OD}}{2} =$$

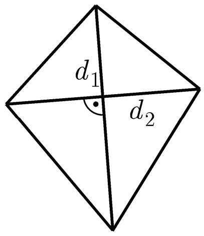
$$= \frac{\left(\overline{OB}+\overline{OD}\right)\left(\overline{AO}+\overline{CO}\right)}{2} = \frac{d_1 d_2}{2}$$



Пример 2. Плоштината на четириаголник со заемно нормални дијагонали $d_1 = 12$ и $d_2 = 7$ е еднаква на $P = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{12\cdot 7}{2} = 42$. ♦

Ромбот и делтоидот се четириаголници со заемно нормални дијагонали па нивната плоштина се пресметува со формулата $P = \frac{d_1 d_2}{2}$.

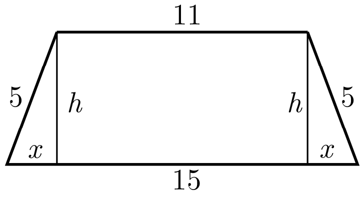




Задача 1. Даден е рамнокрак трапез со основи $a = 15\text{cm}, b = 11\text{cm}$ и крак $c = 5\text{cm}$. Одреди ги висината и плоштината на трапезот.

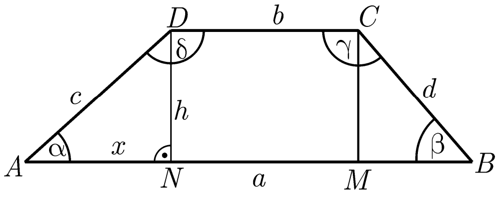
Решение. Од цртежот имаме $15 = 2x + 11$, па $x = 2$. Сега, од питагоровата теорема добиваме $h = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$, па

$$P = \frac{(15+11)\sqrt{21}}{2} = 13\sqrt{21}\ .\ ♦$$



Задача 2. Даден е трапез со основи $a = 35\text{cm}, b = 14\text{cm}$ и краци $c = 13\text{cm}, d = 20\text{cm}$. Одреди ја висината и плоштината на трапезот.

Решение. Од цртежот имаме $\overline{AN} + \overline{MB} = 35 - 14 = 21\text{cm}$. Ако ставиме $\overline{AN} = x$, тогаш $\overline{MB} = 21 - x$ и од питагоровата теорема за ΔAND и ΔMBC добиваме $h^2 = 13^2 - x^2$ и $h^2 = 20^2 - (21-x)^2$, соодветно. Според тоа



$$13^2 - x^2 = 20^2 - (21-x)^2$$

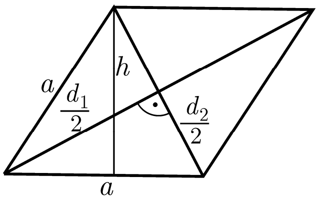
$$169 - \cancel{x^2} = 400 - 441 + 42x - \cancel{x^2}$$

$$42x = 210$$

$$x = 5$$

Значи $h^2 = 13^2 - 5^2$ т.е. $h = 12\text{cm}$. За плоштината на трапезот имаме

$$P = \frac{(35+14)}{2}\cdot 12 = 294\text{cm}^2.\ ♦$$

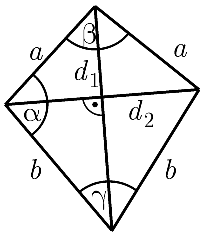


Пример 3. Ромб со дијагонали $d_1=16\text{cm}$ и $d_2=12\text{cm}$ има

$$P=\frac{d_1d_2}{2}=96\,\text{cm}^2,\ a=\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}=10\,\text{cm} \text{ и}$$

$$h=\frac{P}{a}=9{,}6\,\text{cm}. \ ♦$$

Пример 4. Делтоид со страни $a=4dm$, $b=5dm$ и $d_1=7dm$ (d_1 е оска на симетрија на делтоидот) има $P=2\cdot P_\Delta=8\sqrt{6}dm^2$, каде P_Δ е плоштината на триаголникот со страни a,b и d_1 пресметана со Хероновата формула, $L=2(a+b)=18dm$ и $d_2=\frac{2P}{d_1}=\frac{16\sqrt{6}}{7}dm$.♦



Пример 5. Делтоид со страни $a=4dm$, $b=5dm$ и $d_2=7dm$ (d_2 не е оска на симетрија на делтоидот) има $d_1=x+y=\sqrt{4^2-3{,}5^2}+\sqrt{5^2-3{,}5^2}\approx 5{,}51dm$, каде x и y се деловите од дијагоналата определени со рамнокраките триаголници, $P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}\approx 19{,}29dm^2$ и $L=2(a+b)=18dm$. ♦

Задачи

1. Во рамнокрак трапез со остар агол $\alpha=45^0$, помалата основа е $12cm$, а висината $3cm$. Пресметај ја плоштината на трапезот.

2. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи $20cm$ и $12cm$ чии дијагонали се заемно нормални.

3. Пресметај ја плоштината на трапез со основи $20\,\text{cm}$ и $11\,\text{cm}$ и краци $17\,\text{cm}$ и $10\,\text{cm}$.

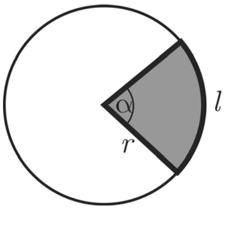
4. Во делтоид со страни 4 и 5 е впишана кружница со радиус 2. Пресметај ја плоштината на делтоидот.

5. Во ромб е впишана кружница со радиус r. Изрази ја должината на страната на ромбот преку радиусот, ако е познато дека таа е шест пати помала од збирот на дијагоналите.

8.4. Периметар на кружница.
Плоштина на круг и делови од кругот

Должината (периметарот) на кружница со радиус r се пресметува со формулата $\boxed{L=2r\pi}$, а плоштината на круг со радиус r се пресметува со формулата $\boxed{P=r^2\pi}$.

Пример 1. Периметарот на кружница со радиус 7 е еднаков на $L=2\cdot 7\pi=14\pi$, а неговата плоштина е еднаква на $P=7^2\pi=49\pi$. ♦



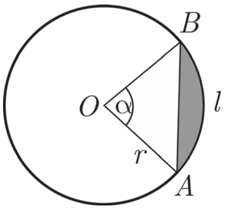
Кружен лак е дел од кружницата зафатен меѓу две нејзини точки. Должината на кружниот лак од кружница со радиус r, што одговара на централен агол α се пресметува со формулата $\boxed{l=\frac{r\pi\alpha}{180^0}}$.

Пример 2. Должината на лакот од кружница со радиус 6 и централен агол 45° е еднаква на $l=\frac{6\pi 45^0}{180^0}=\frac{3\pi}{2}$. ♦

Кружен исечок од круг со радиус r е делот од кругот зафатен меѓу два радиуси. Плоштината на кружниот исечок од круг со радиус r, со соодветен централен агол α се пресметува со формулата $\boxed{P=\frac{r^2\pi\alpha}{360^0}}$ или $\boxed{P=\frac{lr}{2}}$.

Пример 3. Плоштината на кружен исечок од круг со радиус $6\,\mathrm{cm}$, со соодветен централен агол од 45° е еднаква на $P=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\frac{3\pi}{2}6=\frac{9\pi}{4}\mathrm{cm}^2$. ♦

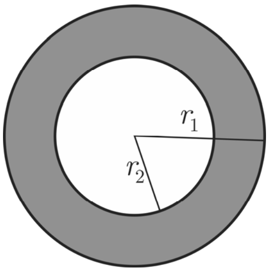
Кружен отсечок е делот од кругот ограничен со една тетива. Плоштината на кружниот отсечок се пресметува со формулата $P=P_1-P_{\Delta ABO}$, каде P_1 е плоштината на кружниот исечок од круг со радиус r, со соодветен централен агол α.



Пример 4. Плоштината на кружен отсечок од круг со радиус $6\,\mathrm{cm}$, со соодветен централен агол 45° е еднаква на

$$P=\frac{9\pi}{4}-\frac{1}{2}r^2\sin 45^\circ=\frac{9\pi}{4}-18\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{9\pi-36\sqrt{2}}{4}\mathrm{cm}^2.\ ♦$$

Кружен прстен е делот од рамнината ограничен со две концентрични кружници. Плоштината на кружниот прстен што го формираат две концентрични кружници со радиуси r_1 на поголемата и r_2 на помалата се пресметува со формулата $\boxed{P=r_1^2\pi-r_2^2\pi}$ или $\boxed{P=\left(r_1^2-r_2^2\right)\pi}$.



Пример 5. Плоштината на кружен прстен формиран од кружници со радиуси 5 и 4 е еднаква на $P=(5^2-4^2)\pi=9\pi$. ♦

Пример 6. Кружница со радиус 6 е поделена на 8 еднакви делови, а кружница со радиус 8 е поделена на 6 дела. Од двете кружници земен е по еден исечок. Кој од исечоците има поголема плоштина?

Нека $P_1=\frac{6^2\pi\frac{360^0}{8}}{360^0}=\frac{36\pi}{8}$ и $P_2=\frac{8^2\pi\frac{360^0}{6}}{360^0}=\frac{64\pi}{6}$. Јасно $P_2>P_1$. ♦

Пример 7. Плоштината на кружен прстен е еднаква на една четвртина од плоштината на помалиот круг. Односот на радиусите на круговите го одредуваме на следниот начин:

Од условот $\left(R^2-r^2\right)\pi=\frac{1}{4}r^2\pi$ имаме $R^2=\frac{5}{4}r^2$ т.е. $R:r=\sqrt{5}:2$. ♦

Пример 8. Ако должината на лакот AB е πcm и соодветниот централен агол е $\alpha = 15^0$, тогаш периметарот на кружницата ќе го одредиме на следниот начин:

Од равенството $l = \frac{r\pi\alpha}{180^0}$ се добива $l = \frac{2r\pi\alpha}{360^0} = \frac{L\alpha}{360^0}$ т.е. $L = \frac{l \cdot 360^0}{\alpha}$.

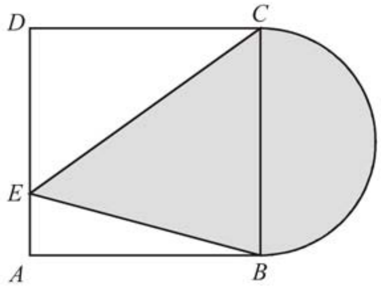
Значи бараниот периметар е $L = 24\pi cm$. ♦

Задачи

1. Од произволна точка A што лежи на кружница повлечени се две тетиви со должина 9cm и 17cm. Одреди го радиусот на кружницата, ако растојанието меѓу средините на тетивите е 5cm.

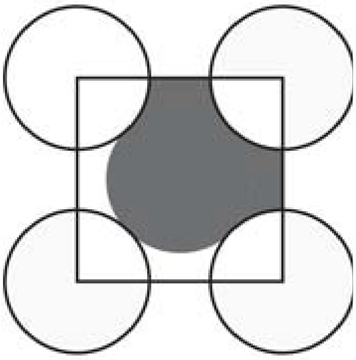
2. Тетивите $\overline{AB} = 6cm$ и $\overline{AC} = 8cm$ се заемно нормални. Одреди ја плоштината на кругот.

3. Пресметај ја плоштината на исенчената фигура ако $ABCD$ е квадрат со дијагонала $4cm$, BC е дијаметар на круг и E е произволна точка од страната AD.



4. Од полукруг со радиус $R = 10cm$, отсечени се два полукруга со радиуси $r_1 = 3cm$ и $r_2 = 7cm$ чии центри лежат на дијаметарот на полукругот и се допираат меѓу себе. Одреди ја плоштината на остатокот.

5. Пресметај ја плоштината на осенчениот дел ако сите кружници имаат радиус $1cm$. Притоа четирите кружници имаат центри во темињата на квадратот и ја допираат петтата кружница однадвор.



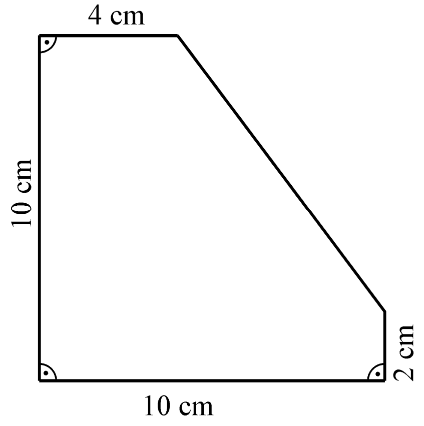
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Основите на еден трапез се $a = 25$ и $b = 15$, еден од краците е $c = 8$. Определи го периметарот и плоштината на трапезот ако збирот на аглите на поголемата основа е 90°.

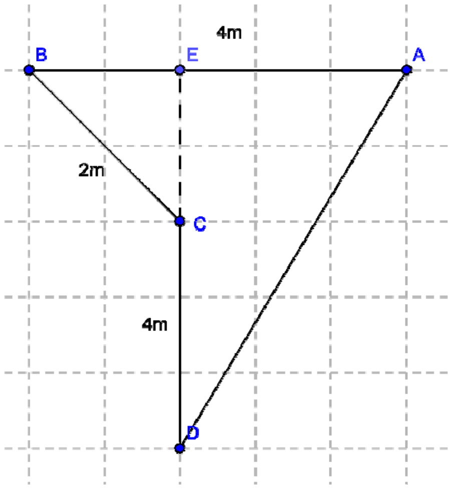
2. Една кутија со боја е доволна да се обои парче картон во облик на правоаголник на кој едната страна му е трипати подолга од другата страна. Ако од парчето картон направиме нов правоаголник, скратувајќи ја подолгата страна за $18cm$ и продолжувајќи ја другата за $8cm$ ќе истрошиме исто количество боја. Одреди го периметарот на новиот правоаголник.

3. Квадратот $ABCD$ има страна со должина $36cm$. На страната AB избрана е точка E која е на растојание $12cm$ од темето B, на средината на страната BC лежи точката F и на страната CD избрана е точката G која е на растојание $12cm$ од темето C. Одреди ја плоштината на делот кој лежи во внатрешноста на триаголникот EFG и во надворешноста на триаголникот AFD.

4. Пресметај ја плоштината на фигурата.



5. Еден зајак се наоѓа на ливада. Прво скока $4m$ на запад, па $2m$ на југо-исток и $4m$ на југ. Одреди го растојанието на кое ќе се најде зајакот од почетокот на скокањето.



6. Одреди ја должината на средната линија на правоаголен трапез опишан околу кружница, ако растојанијата од центарот на кружницата до темињата на подолгиот крак се 6 и 8.

7. Отсечката AB поврзува две спротивни темиња на правилен шестаголник. Отсечката CD поврзува средни точки на две спротивни страни на шестаголникот. Определи го производот на должините на отсечките AB и CD, ако плоштината на шестаголникот е 60.

8. Пресметај ја плоштината на триаголникот со страни $a=2$, $b=3$ и $c=4$.

9. Пресметај ја плоштината на делтоид со дијагонали $d_1=15$ и $d_2=12$.

10. Должината на хипотенузата на правоаголен триаголник е $6,5cm$ а должината на една негова катета е $2,5cm$. Пресметај го периметарот на тој триаголник.

11. Висината на рамнокрак триаголник спуштена кон основата е $8cm$, а кракот е $10cm$. Пресметај ја плоштината на тој триаголник.

12. Одреди ја плоштината на кружен прстен ограничен со кружници со периметар 8π и 20π .

13. Во кружница е впишан правилен осумаголник, а околу неа е опишан квадрат. Одреди го односот од плоштините на многуаголниците.

14. Плоштината на кругот впишан во правилен шестаголник е 9π . Одреди ја плоштината на шестаголникот.

15. Во ромб е впишана кружница со радиус r. Изрази ја должината на страната на ромбот преку радиусот, ако е познато дека таа е четири пати помала од збирот на дијагоналите.

16. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи $40cm$ и $24cm$ чии дијагонали се заемно нормални.

17. Во квадрат со страна a впишан е друг квадрат чии темиња ја делат страната на првиот квадрат во однос $1:4$. Одреди го односот на плоштините на квадратите.

18. Пресметај ја плоштината на трапезот со основи $a=9cm$, $b=3cm$ и краци $c=8cm$ и $d=10cm$.

19. Одреди го радиусот на опишаната кружница R околу рамнокракиот триаголник ABC со основа a и крак b.

20. Во ромб со дијагонали $30cm$ и $40cm$ впишана е кружница која ја дели страната на ромбот на два дела. Одреди ја должината на поголемиот дел.

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

Модуларна единица 1

1.1.

1. Искази се **в)** и **г)**.

2. а) неточен исказ, **б)** точен исказ, **в)** точен исказ, **г)** точен исказ

3. а) $\perp$, **б)** T, **в)** $\perp$, **г)** $\perp$.

4. а) сложен, **б)** прост, **в)** сложен, **г)** прост.

1.2.

1. а) T, **б)** $\perp$, **в)** T, **г)** $\perp$, **д)** T, **ѓ)** T.

2. а) $\perp$, **б)** T, **в)** T, **г)** T.

3.а) $p \Leftrightarrow r$:Секој квадрат има еднакви дијагонали ако и само ако дијагоналите во секој трапез се еднакви, $\tau(p \Leftrightarrow r) = \perp$,

б) $q \vee r$: Дијагоналите во ромбот се заемно нормални или дијагоналите во секој трапез се еднакви, $\tau(q \vee r) = \mathrm{T}$,

в) $r \Rightarrow p$: Ако дијагоналите во секој трапез се еднакви, тогаш секој квадрат има еднакви дијагонали, $\tau(r \Rightarrow p) = \mathrm{T}$.

4.а) T**, б)** T**, в)** $\perp$.

5. а) $\perp$, **б)** T, **в)** $\perp$, **г)** T, **д)** $\perp$, **ѓ)** T.

1.3.

1. а) неутрална исказна формула, **б)** неутрална исказна формула.

4. а) да (Упатство: состави таблица со 8 можности за p, q и r), **б)** да.

5. а) да, **б)** да.

1.4.

1. $B = \{3,6,9,12,15,18\}$**,** $C = \{2,4,6,8,10,12,14\}$**,** $B \neq C$.

2. а) точен исказ, **б)** точен исказ, **в)** неточен исказ.

3. $B = \{15,20,35,40,55\}$.

4. $\{2,5,8,10,13,17,18,20,25,26,29\}$.

5. Множеството $\varnothing$ нема елементи, а $\{\varnothing\}$ е множество со еден елемент.

1.5.

1. а) $A \cap B = \{2,4,5\}$**,** $B \cap C = \{4,5,7\}$ и $A \cap C = \{3,4,5\}$,

б) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$**,** $B \cup C = \{2,3,4,5,6,7,8\}$ и $C \cup A = \{1,2,3,4,5,7,8\}$,

в) $A \setminus B = \{1,3\}$**,** $B \setminus C = \{2,6\}$ и $C \setminus A = \{7,8\}$**,**

г) $A \Delta B = \{1,3,6,7\}$, $B \Delta C = \{2,3,6,8\}$ и $C \Delta A = \{1,2,7,8\}$.

2. а) $A \cap B = A$, **б)** $A \cup B = B$, **в)** $A \setminus B = \varnothing$, **г)** $B \setminus A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$, **д)** $A \Delta B = B \setminus A$,

ѓ) $A'_B = B \setminus A$.

3. а) $A \setminus B = \{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19\}$, **б)** $A \Delta B = A \setminus B$.

4. а) $(A \times A) \cap A = A^2 \cap A = \varnothing$, **б)** $A \times (A \cap A) = A \times A = A^2$, **в)** $A \Delta A' = \mathcal{U}$.

5. а) $A \setminus C = \varnothing$, **б)** $B \Delta C = \{1,2,4\}$, **в)** $B \cup C = \{1,2,3,4\}$,

г) $A \times C = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$.

1.6.

1. а) $M_{P_1(x)\wedge P_2(x)}=\{6\}$, **б)** $M_{P_1(x)\vee P_2(x)}=\{2,3,4,6,8,9,10\}$,

в) $M_{\neg P_1(x)}=D\setminus M_{P_1(x)}=\{1,3,5,7,9\}$.

2. а) $M_{P_1(x)\veebar P_2(x)}=\{-3,-1,0,1\}$, **б)** $M_{P_1(x)\Rightarrow P_2(x)}=\{-4,-3,-2,0,2,3,4\}$,

в) $M_{P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)}=\{-4,-2,2,3,4\}$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) не, **б)** да, **в)** не, **г)** не.

2.а) вистинит исказ, **б)** вистинит исказ, **в)** вистинит исказ, **г)** невистинит исказ.

3. а) $\top$, **б)** $\perp$, **в)** $\top$, **г)** $\top$.

4. а) „Бројот 12 е делив со 3“, „Бројот 12 е делив со 4“, **б)** „$\frac{2}{3}$ е рационален број“, „$0,(3)$ е рационален број“, **в)** „Бројот 3 е сложен број“, „Бројот 3 е непарен број“ .

5. а) $\perp$, **б)** $\top$, **в)** $\top$, **г)** $\perp$, **д)** $\perp$.

6. а) $\top$, **б)** $\top$, **в)** $\perp$.

7. а) $\top$, **б)** $\top$, **в)** $\top$.

8. а) тавтологија, **б)** контрадикција.

11. $B=\{6,12\}$, $C=\{4,8,12\}$, $B\neq C$.

12. а) $\perp$,**б)**$\top$, **в)** $\top$.

13. $B=\{15,20,30,35,40\}$.

14. $\{3,6,9\}$.

15. а) $A\cap B=\{3,4,5\}$, **б)** $B\cup C=\{1,2,3,4,5,7,8,9\}$, **в)** $A\setminus B=\{1,2\}$, **г)** $C\Delta A=\{9\}$.

16. а) $A\cap B=B$, **б)** $B\setminus A=\varnothing$, **в)** $A\Delta B=A\setminus B$.

17. $A\setminus B=\{10,11,13,14,16,17,19\}$, **б)** $A\Delta B=\{3,6,9,10,11,13,14,16,17,19\}$.

18. а) $(A\cap A)\Delta A'=\mathcal{U}$, **б)** $A\times(A\cup A)=A^2$, **в)** $(A\cap A')\times A'=\varnothing$.

19. $A\times B=\{0,2\}\times\{0,-1\}=\{(0,0),(0,-1),(2,0),(2,-1)\}$.

20. а) $M_{P_1(x)\veebar P_2(x)}=\{-3,1,-2,-1\}$, **б)** $M_{P_1(x)\Rightarrow P_2(x)}=\{-4,-2,-1,0,2,3,4\}$,

в) $M_{P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)}=\{-4,0,2,3,4\}$.

Модуларна единица 2

2.1.

1. а) точен исказ, **б)** неточен исказ, **в)** точен исказ.

2. а) 1310, **б)** 330, **в)** 1275, **г)** 10000.

3. а) сложен, **б)** сложен, **в)** прост.

4. а) 2 , **б)** 117780.

5. $НЗС(3,5,7)=105$ и $2\cdot 105=210$, па бараниот број е 210.

2.2.

1. а) 7, **б)** 0, **в)** 33.

2. а) 18, **б)**38.

3. а) 19, **б)** 27.

4. $A=24<72=B$.

5. $(-2+3-5+11)+(-3+2-6+10)+(-1+4-4+12)+(2-3+5-11)=14$

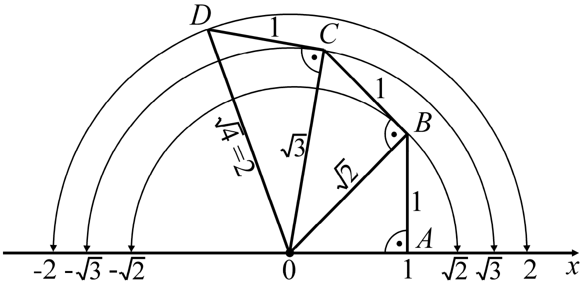
2.3.

1. а) $0,625$, б) $0,1\dot{6}$, в) $0,8125$. 2. а) $5,(83) > 5,8(3)$, б) $4,(371) < 4,(37)$.

3. а) -752**, б)** 8550**. 4. а)** $\frac{62}{15}$**, б)** $\frac{1559}{660}$**. 5.** 1.

2.4.

1.



2. $(-3,6]\cap[-5,2)=(-3,2)$ и $(-3,6]\cup[-5,2)=[-5,6]$.

3. а) $3,4567 < 3,4576$, **б)** $-3,1223 > -3,1224$.

4. а) $7\sqrt{7}$, **б)** $3\sqrt{3}+5\sqrt{5}$.

5. а) различни знаци, **б)** исти знаци и тие се позитивни, **в)** исти знаци и тие се негативни, **г)** исти знаци.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$**, б)** $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5$**, в)** $3\cdot3\cdot3\cdot31$**.**

2. а) 1404**, б)** 6**.**

3.а)1000, б) 855.

4. 84.

5. $5460cm = 54,6m$.

6.$\{105,140,175\}$.

7. а) 10**, б)** -1**.**

8. а) 0**, б)** -1179**, в)** -1014**, г)** -724**.**

9. а) 42**, б)** 41**, в)** 31**, г)** 8**.**

10. а) -678**, б)** $\frac{2143}{234}$**.**

11. а) $1,39$**, б)** $0,125$**.**

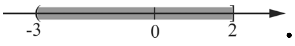
12. а) $\frac{139}{12}$**, б)** $-\frac{29}{90}$**.**

13. а) $\frac{133}{18}$**, б)** $\frac{245}{99}$**.**

14.

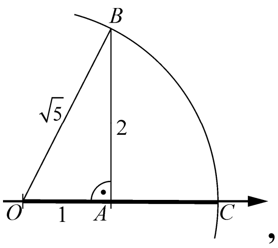
а)

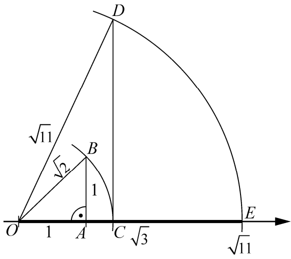

, б)

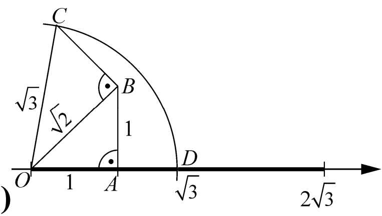

,в)


.

15.

а)


, б)


, в)


.

16. а) $[0,4]$, **б)** $(-2,5)$. **17.** $[-3,8;3,2]$. **18. а)** $8\sqrt{5}$, **б)** $13\sqrt{2}$. **19. а)** $15,2$, **б)** $7,8$, **в)** $42,55$.

20. не

Модуларна единица 3

3.1.

1. а) 17; **б)** 5; **в)** 0. **2. а)** 399; **б)** $-23,568$. **3. а)** 150; **б)** 4375.

4. а) a^{10}; **б)** a^{n+5}; **в)** x^n; **г)** a^3; **д)** b^{n-1}; **ѓ)** a.

5. а) a^6; **б)** a^{2n}; **в)** $8a^3b^6$; **г)** $9a^4b^4c^6$; **д)** $100^3=1000000$; **ѓ)** $-a^6$ **е)** 1;
ж) $-\frac{125x^6}{b^3}$; **з)** $\frac{a^{12}b^4}{16c^{12}}$

3.2.

1. а) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$; **б)** $\left(\frac{4}{5}\right)^0$. **2. а)** 2; **б)** 128.

3. а) $\frac{1}{16}$; **б)** -16; **в)** 16; **г)** -4; **д)** 1; **ѓ)** $\frac{1}{15,1321}$. **4. а)** $\frac{3x}{4a^2c^3}$; **б)** $\frac{3a^2y^4}{2^2x^2}$; **в)** $\frac{5c^3x^3}{4a^5}$.

5. а) $xa^{-1}y^{-2}$; **б)** $3xc^{-1}y^3$; **в)** $2ax^2(a-b)^3$. **6. а)** $\frac{40}{5x^2c^3a^6}$; **б)** $\frac{25b}{a^5}$; **в)** $4x^2y^6$.

7. а) $2x^3+\frac{4}{x^3}$; **б)** $\frac{125}{8}x^9y^{24}$; **в)** $\frac{xy}{y-x}$; **г)** $\frac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^2}$;

3.3.

1. а) $a=3$; **б)** $x=-2$; **в)** $a=b$. **2. а)** -4; **б)** 2,5; **в)** -1; **г)** $-\frac{1}{3}$; **д)** $\frac{2}{5}$.

3. $-3ab$ и ab, $\frac{1}{2}a^2x$, $-a^2x$ и $6a^2x$, $-7ax^2$ и ax^2. **4.** $6ab, -a^2b^2, 2ax, -\frac{x}{3}, x^2y, -0,5a$.

5. 4. **6. а)** Да; **б)** Да; **в)** Не. **7. а)** $2ab-5ab^2$; **б)** $1,2a-1,5b-ab$.

3.4.

1. а) $19x^4-4x^3+x^2$; **б)** $7xy$. **2. а)** $5x^2+5ax+8$; **б)** $3a^4+2a^3b+a^2b^2+3ab^3-b^4$.

3. а) $-8a$; **б)** $5x$; **в)** 0; **г)** $3ax+ax^2$.

4. а) $2a^2x-3ax^2+8$; **б)** $5x^3y+xy^2+2xy-5x^2y-3$.

5. а) $-2x^2-5xy+6y^2$; **б)** $6x^2y-2xyz-2x^2z$.

3.5.

1. а) $10a^5b^4$; **б)** $-3a^2x^8y^4$; **в)** $\frac{3}{7}x^3y^5z$.

2. а) $-16x^5y+8x^4y^2+10x^3y^3-6x^2y^3$; **б)** $-9a^2b^3c^2+21a^3b^2c^3+3a^3b^2c^2$.

3. а) $x^3-5x^2y+4xy^2+8x^2-15xy-8y^2+10y+15x$;

б) $3a^6-15a^5b+26a^4b^2-28a^3b^3+17a^2b^4+20ab^5-9b^6$.

4. а) $x^2-10x+25$; **б)** $9c^2+12c+4$; **в)** $1-6x+9x^2$; **г)** $9x^2+y^2+25-6xy+30x-10y$;

д) $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$; **ѓ)** $64y^4+49z^2+112y^2z$; **е)** $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$;

ж) $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$. **5. а)** $27-4x$; **б)** $-c^2$.

3.6.

1. а) $-4x$; **б)** $3ab$; **в)** $-\frac{3}{5}y$.

2. а) $4a-5b$; **б)** $-1+3x^2y^2$; **в)** $6ax-9a^2x^2+15a^3$; **г)** $3x^2-2ax+5a^2$.

3. а) $3a^3-6a^2b+2b^2-4a^3b$; **б)** $-5x+2a-6x^2-8a^2x^3$; **в)** $x^2-9y^2-\frac{2x^2}{y}+\frac{y}{2}$

4. а) x^2-x+1; **б)** $2a^2b-3ab^2-b^3$; **в)** $3x^3-2x^2+x-1$. **5. а)** Не; **б)** Да; **в)** Не; **г)** Да.

3.7.

1. а) $3(x+2y)$; **б)** $2a(b-c)$; **в)** $7x^3(x^2+3)$.

2. а) $9b^3(3a-b)$; **б)** $ay(a-y^2)$; **в)** $3a(3x-2y+4z)$.

3. а) $(2a+5c)(b-3)$; **б)** $(a-b)(x+1)$; **в)** $(5-2x-2y)(x+y)$.

4. а) $(ab-2)(ab+2)$; **б)** $(10x-1)(10x+1)$; **в)** $\left(\frac{1}{3}a-c\right)\left(\frac{1}{3}a+c\right)$.

5. а) $(a-2)(a^2+2a+4)$; **б)** $(3x+1)(9x^2-3x+1)$; **в)** $(2m-n)(4m^2+2mn+n^2)$.

6. а) $(2a-b-c)(2a+b+c)$; **б)** $(x-y)(x+y-3)$; **в)** $(a-b)(x-y)(a^2+ab+b^2)$.

3.8.

1. а) 6; **б)** 15; **в)** 15; **г)** 4. **2. а)** $3ab$; **б)** $3x^2y^2$; **в)** $a(a+b)^2$; **г)** $x+y$; **д)** x^2-y^2.

3. а) 900; **б)** 168; **в)** 4500; **г)** 2880.

4. а) $120a^3b^3c^2$; **б)** $ab(x+2)$; **в)** $x(x+y)$; **г)** $a^2(a+3b)(a-3b)$;

д) $x(1-x)(x^3+1)$; **ѓ)** $15y(x-2y)^3(x+2y)$.

3.9.

1. а) Нема слисла за $x=0$, а за $x=-2$ добива вредност 0;

б) Нема слисла за $x=1$, а за $x=3$ добива вредност 0;

в) Нема слисла за $x=2$ и $x=5$, а никогаш не е еднаква на нула.

2. а) $\frac{3x}{4a}$; **б)** $\frac{3x^2}{y}$; **в)** $\frac{x-y}{a}$; **г)** $\frac{1}{3a-1}$; **д)** $\frac{3}{a^2-2a+4}$; **ѓ)** $-\frac{1}{3a}$.

3. а) $-\frac{1}{2a}$, $-\frac{1}{6}$; **б)** $x-2$; $1{,}5$; **в)** -1.

4. а) $\frac{a+1}{a(a+1)}$ и $\frac{2a}{a(a+1)}$; **б)** $\frac{20c^2}{30a^2b^3c^2}$, $\frac{25a^3}{30a^2b^3c^2}$ и $\frac{6ab^2c}{30a^2b^3c^2}$; **в)** $\frac{a(x+y)}{(x+y)^2}$ и $\frac{b}{(x+y)^2}$;

г) $\frac{2x(x-y)}{x^2-y^2}$, $\frac{2y(x+y)}{x^2-y^2}$ и $\frac{xy}{x^2-y^2}$; **д)** $\frac{10x}{2x(2x-1)}$ и $\frac{x}{4x^2-2x}$;

ѓ) $\frac{2a(a+x)}{a(a-x)(a+x)^2}$, $\frac{3ax(a^2-x^2)}{a(a-x)(a+x)^2}$ и $\frac{5a^2(a-x)}{a(a-x)(a+x)^2}$.

3.10.

1. а) $\frac{3(a-1)}{b}$; **б)** $\frac{2(a+x+1)}{a}$. **2. а)** $\frac{x-2}{(x+1)(2x+1)}$; **б)** $\frac{6x-8}{(x-2)^2(x+2)}$.

3. а) $-\frac{1}{x^2+1}$; **б)** $\frac{7}{2(a+2)}$. **4. а)** $\frac{1}{2}$; **б)** $\frac{4x}{(x-3)(x+3)^2}$. **5. а)** $\frac{2a(a+b)}{a^2+b^2}$; **б)** $-\frac{1}{2x}$.

6 а) $\frac{2y}{x-1}$; **б)** $\frac{3x}{2a}$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) 28,27; **б)** -32 **2. а)** $\frac{33}{43}$; **б)** $-0{,}3$. **3. а)** x^8; **б)** a^7b^4; **в)** $\frac{a^3}{8c^3}$.

4. Цели рационални изрази се под а) и г), а дробно рационални изрази се под б) и в).

5. а) Не; **б)** Да. **6.** $5x^2+8x-7$. **7. а)** $4xy-3x$; **б)** $3x$. **8.** $-2x^2+5xy-y^2-2y+4x+6$.

9. а) $x^2+4xy-y^2$; **б)** $-c^2-4c+9$. **10. а)** 160801; **б)** 494209; **в)** 1004004.

11. $5a^2-a-122$. **12.** Изврши го делењето на полиномите x^2+x+1.

13. а) $(a+3)(a^2+3)$; **б)** $(2a-b)(6x+y)$.

14. а) $(x^2-1)(x^3-1)$; **б)** $(x+y)(x^2-xy+y^2+2x)$.

15. а) $(a-b-c)(a-b+c)$; **б)** $(x+a)(x^2-3x+1)$.**16. а)** 15; **б)** 1. **17. а)** 1500 **б)** $30x^3a^4b^3$.

18. а) $\frac{1}{y}$; **б)** $\frac{x+1}{x-1}$. **19.** $\frac{2a^3c}{abc}$, $\frac{5b^3a}{abc}$, и $\frac{7c^3b}{abc}$. **20. а)** $\frac{1}{x^2-c^2}$; **б)** 4. **21.** $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2$. **22.** 15.

Модуларна единица 4

4.1.

1. Сите пропорции се точни. **2. а)** $x=4{,}8$; **б)** $x=15$; **в)** $x=1$. **3.** $x=4$, $y=12$, $z=12$.

4. $a:b:c:d=12:18:15:11$. **5.** Прв дел 60, втор дел 180, трет дел 360.

4.2.

1. а) Право пропорционални, **б)** обратно пропорционални, **в)** право пропорционални, **г)** обратно пропорционални.

2. Тие се право пропорционални, а коефициентот на пропорционалност е 6.

3. Не. **4.** Право пропорционална зависност.

5. Обратно пропорционална зависност, а коефициентот на пропорционалност е волуменот на базенот изразен во литри.

4.3.

1. 6 работници. **2.** 57,6 килограми шеќер. **3.** 5 часа и 24 минути. **4.** 4 денови. **5.** $2400kW$.

4.4.

1. а) 112,5 километри; б) 720 денари. **2.** 15% **3.** 35 ученици. **4.** 120 килограми.

5. 1800 денари.

4.5.

1. а) 372, 558 и 930; **б)** 900, 600 и 360. **2.** 540, 360 и 180.

3. 5913 денари, 9461 денар и 11826 денари.

4. 300000 денари, 360000 денари и 432000 денари.

5. 50000 денари, 45000 денари и 40500 денари.

4.6.

1. а) 360 евра; **б)** 360 евра; **в)** 4080 евра. **2. а)** 3300; **б)** 3200; **в)** Славица. **3.** 7,5%.

4. 38465 денари. **5.** 16347 денари.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) $1:4$; **б)** $2:5$; **в)** $\frac{32}{51}$ **г)** $1:3b$; **2.** 16:15. **3. а)** $x=6$; **б)** $x=3$; **в)** $x=\frac{ab}{a-b}$.

4. 16, 40, 56, 48. **5.** 480 денари. **6.** 864 кубни метри. **7.** 27 работника.

8. 1 час и 30 минути. **9.** 5400 денари. **10.** 24 тони. **11.** 100 дена. **12.** 45,83%.

13. 18 денари. **14.** 40360000 жители. **15.** 612 денари.

16. 600 литри, 800 литри, 440 литри, 320 литри и 320 литри. **17.** 360000 денари. **18.** 18,5%.

19. 2572,5 денари. **20. а)** 4504,5 денари; **б)** 15004,5 денари.

Модуларна единица 5

5.1.

1. а) Да; **б)** Не; **в)** Не. **2. а)** $x=2$; **б)** $x=\frac{9}{5}$; **в)** $x=\frac{2}{5}$; **г)** $x=\frac{8}{5}$. **3.** $x=-3$.

4. а) Да; **б)** Не; **в)** Да.

5.2.

1. а) $x=4$; **б)** $x=6$. **2. а)** $x=4$; **б)** $y=13$. **3. а)** $x=\frac{5}{13}$; **б)** $x=\frac{26}{35}$.

4. а) $x=\frac{9}{4}$; **б)** $y\in ○$ и $y\neq\pm3$. **5. а)** $x=1$; **б)** $x=-2$ и $x=1$.

5.3.

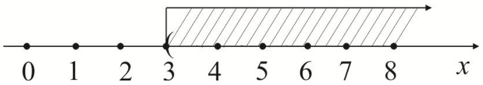
1. 36. **2.** Мајката има 42 години, а Дарко 14 години. **3.** 1956, 5 денари.
4. Кракот е долг $13cm$, а основата е долга $10cm$. **5.** 9 часа и 20 минути.

5.4.

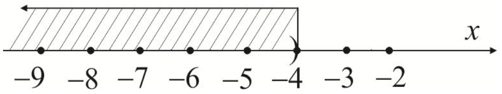
1. а) Да; **б)** Да. **2. а)** Да; **б)** Да; **в)** Да.

5.5.

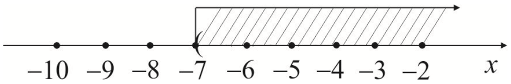
1. а)



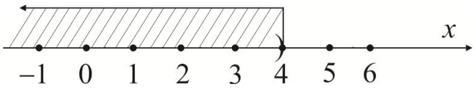
б)



в)



г)



2. а) $\left(\frac{3}{2,},\infty\right)$ **б)** $(-1,\infty)$ **в)** $(-9,\infty)$. **3. а)** $\left(\frac{9}{7},\infty\right)$ **б)** $\varnothing$ **в)** $\left(\frac{55}{13},\infty\right)$

4. а) $(-\infty,2)$ **б)** $\left(\frac{13}{14},\infty\right)$ **в)** $\left(-\infty,\frac{70}{14}\right]$ **5.** Најмногу 32.

5.6.

1. $\left(-\infty,\frac{2}{5}\right)$. **2.** $\left(\frac{8}{3},\infty\right)$. **3.** $\left(\frac{5}{2},\infty\right)$. **4.** $(-2,\infty)$. **5.** $(4,\infty)$. **6.** $\left(\frac{11}{7},11\right)$. **7.** $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$.

8. $\left(-\frac{3}{2},4\right)$. **9.** $(-5,-1)$. **10.** $(2,\infty)$. **11.** $(-\infty,\infty)$. **12.** $\left(\frac{9}{14},\infty\right)$.

13. По 11 години работење.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) $x=-2$; **б)** $u=2$. **2. а)** $t=12$; **б)** $w=-11$. **3. а)** $x=\frac{1}{6}$; **б)** $x=\frac{3}{16}$.

4. а) Нема решение; **б)** $x=-5$. **5. а)** $y=-\frac{1}{4}$; **б)** $x=\frac{19}{5}$. **6. а)** $x=0$ и $x=6$; **б)** $x=-2$.

7. 18 и 20. **8.** Марина има 14 години, а нејзиниот брат има 11 години. **9.** $32cm$.

10. 4 часа. **11. а)** $(-\infty,6]$; **б)** $\left[1\frac{4}{31},\infty\right)$. **12. а)** $(-1,\infty)$; **б)** $\left(-\infty,\frac{3}{7}\right)$.

13. 12 колачи. **14.** $\left(-\frac{5}{2},4\right)$. **15.** $(-\infty,-4)$. **16.** $\left(\frac{13}{5},\infty\right)$.

17. Системот нема решение. **18.** $(7,\infty)$. **19.** $(-\infty,\infty)$.

20. $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$. **21.** $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{3}{5},\infty\right)$. **22.** $\left(\frac{5}{4},2\right)$.

Модуларна единица 6

6.1.

1. а) $a=6,b=-1$, **б)** $a=-2,b=1$, **в)** $a=\sqrt{3},b=-\frac{1}{2}$, **г)** $a=\frac{3}{7},b=-\frac{5}{7}$. **2. а)** $x_0=3$, **б)** $x_0=-\frac{9}{10}$, **в)** $x_0=4$, **г)** $x_0=-\frac{1}{7}$. **3. а)** $a=2$, **б)** $a=\frac{8}{3}$, **в)** $a=1$. **4.** $D\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$ припаѓа на графикот на функцијата. **5. а)** $a=\frac{3}{4},b=\frac{1}{4}$, **б)** $a=5,b=0$.

6.2.

1. f е монотоно растечка а g и h се монотоно опаѓачки. **2. а)** $k\in\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$, **б)** $k\in\left(\frac{1}{5},\infty\right)$. **3. а)** $a=1$, **б)** Бидејќи секогаш $a-7\neq a+1$ следува дека правите не се паралелни за ниедна вредност на a. **4. а)** се сечат во $(0,2)$, **б)** се сечат во $\left(0,\frac{3}{4}\right)$, в) не се сечат на ординатната оска. **5. а)** $s=2$, **б)** $s=-3$.

6.3.

1.$b=\frac{7}{3}$**. 2.** $c=9$**. 3.** $2x-y=12$**. 4.** $5x-3y=16$**. 5.**$(x,y)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right)$**.**

6.4.

1. а) $(2,1)$**, б)** $\left(\frac{9}{7},\frac{8}{7}\right)$**. 2. а)** $(1,2)$**, б)** $\left(\frac{8}{9},\frac{2}{3}\right)$**. 3. а)** $(2,1)$**, б)** $\left(1,\frac{1}{5}\right)$**. 4. а)** $(1,2)$**, б)** $(2,3)$**. 5. а)** $(10,2)$**, б)** $(3,2)$ **. 6. а)** $(4,3)$**, б)** $(3,2)$**.**

6.5.

1. 9 ученици, 1520 денари. **2.**76 и 54. **3.** 12 и 8. **4.** $80^\circ,80^\circ$ и 20°. **5.** $24cm$ и $12cm$

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) $x_0=1$, **б)** $x_0=-\frac{11}{2}$, **в)** $x_0=\frac{4}{5}$, **г)** $x_0=-\frac{11}{8}$. **2. а)** $a=-\frac{5}{2}$, **б)** $a=13$, **в)** $a=-\frac{11}{4}$. **3. а)**$a=\frac{3}{7}$, $b=\frac{1}{7}$, **б)** $a=3$, $b=0$. **4. а)** $k>-\frac{1}{3}$, **б)** $k>-\frac{1}{5}$**. 5. а)** $a=\frac{2}{13}$, **б)** $a=-8$**. 6. а)** $m=\frac{1}{2}$**, б)** $m=\frac{11}{3}$**. 7.** $b=\frac{7}{5}$**. 8.** $c=10$. **9.** $2x-y=8$**. 10.**

$\left\{\left(x,\frac{5x+1}{3}\right)|\,x\in\mathbb{R}\right\}$. **11.** $(x,y)=(-2,-1)$. **12. а)** $(2,-3)$ **б)** $(2,1)$. **13. а)** $(1,2)$, **б)** $\left(\frac{18}{5},\frac{4}{5}\right)$. **14. а)** $(3,2)$, **б)** $(2,1)$. **15. а)** $(1,2)$, **б)** $(1,-1)$. **16. а)** $\left(\frac{32}{5},\frac{4}{5}\right)$, **б)** $\left(\frac{17}{7},-\frac{2}{7}\right)$. **17. а)** $\left(\frac{55}{19},\frac{29}{19}\right)$, **б)** $\left(\frac{17}{4},\frac{7}{2}\right)$. **18.** Топката чини 1000 денари. **19.** 80° и 10°. **20.** $\left(\frac{61}{15},\frac{83}{45}\right)$.

Модуларна единица 7

7.1.

1. Не. **2.** Правоаголник е четириаголник кој има исти агли како квадратот.

7.2.

1. $A,B,C,E\in p,\ M,N\notin p.$

2. Може да се повлечат бесконечно многу криви линии, а само една права.
3. Бесконечно многу. **4. а)** Точно; **б)** Точно. **5. а)** Да; **б)** Не. **6.** 3. **7.** $7cm$.
8. а) Да; **б)** Да; **в)** Не; **г)** Да. 9. $2cm,\ 0cm,\ 4cm,\ 0cm,\ 7cm.$
10. Растојание, точка и еднаквост. **11.** Точката K лежи меѓу точките S и M.
12. Тие се колинеарни и се распоредени во следниот редослед $A,S,M,B.$
13. Точката B лежи меѓу A и M, или $B=A$ или $B=M$. **14.** Да.
15. а) Може; **б)** Не може. **16.** 3. **17. а)** 3; **б)** 4. **18.** Отсечка AB.
20. а) Теорема; **б)** Аксиома; **в)** Теорема; **г)** Дефиниција.

7.3.

3. 8 конвексни агли меѓу кои четири се рамни агли.
4. Секој агол има два напоредни агли кои се еднакви меѓу себе. **7.** Рамен агол.
8. а) Искршената линија ќе има само една страна и ќе претставува отсечка;
б) Искршената линија ќе има три страни и ќе претставува триаголник. **9. а)** 3; **б)** 4.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

2. $5cm\le\overline{AB}\le 19cm.$ **3. а)** Не; **б)** Да; **в)** Да; **г)** Не; **д)** Да, кога $A\equiv B$. **4.** Не е точно. **5. а)** Не; **б)** Да.
6. Определена е со две точки: почетокот и произволна друга точка.
7. Права, полуправа или унија на дисјунктни полуправи.
8. а) Унија на две дисјунктни полуправи; б) две точки; в) отсечка.
9. а) Да; **б)** Не; в) Точката M може да лежи и може да не лежи на отсечката. **10.** $\frac{a+b}{2}.$
11. а) 4; **б)** 96; **в)** 2688 (за 28 дена), 2784 (за 29 дена), 2880 (за 30 дена), 2976 (за 31 ден).
12. $\frac{\pi}{3}.$ **13. а)** 1; **б)** 2; **в)** 4. **14.** $a\uparrow\uparrow c,\ d\uparrow\uparrow e,\ a\uparrow\downarrow b,\ b\uparrow\downarrow c.$
15. а) Полуправа; **б)** Полуправа. **16. а)** Празно множество, точка или отсечка; **б)** Права или две полуправи без заеднички точки.

Модуларна единица 8

8.1.

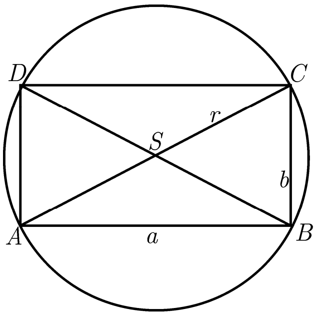
1. а) $a=\sqrt{P}=\sqrt{36}=6\text{cm}$ и $d=\sqrt{2P}=\sqrt{2\cdot 36}=6\sqrt{2}\text{cm}$,

б) $a=\frac{L}{4}=\frac{12}{4}=3\text{cm}$ и $d=a\sqrt{2}=\frac{L\sqrt{2}}{4}=3\sqrt{2}\text{cm}$.

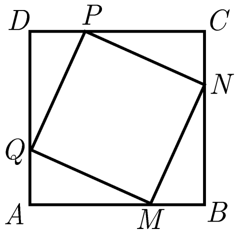
2. а) $b=\frac{P}{a}=\frac{108}{12}=9dm$ и $d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12^2+9^2}=\sqrt{225}=15dm$,

б) $a=\frac{L}{2}-b=\frac{246}{2}-80=43\text{cm}$ и $d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{80^2+43^2}=\sqrt{8249}\approx 90{,}8\text{cm}$.

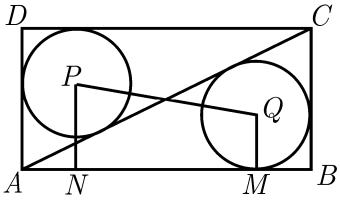
3. Ако дијагоналата на правоаголникот е $d=2r=25\,\text{cm}$ и $b=7\,\text{cm}$. Тогаш $a=\sqrt{d^2-b^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24\,\text{cm}$, па плоштината е $P=ab=24\cdot 7=168\,\text{cm}^2$.



4. Нека во квадратот $ABCD$ е вишан квадратот $MNPQ$ и според условот на задачата $\overline{AM}:\overline{MB}=2:3=k$. Тогаш $\overline{AM}=2k$, $\overline{MB}=3k$, па $\overline{AB}=a=5k$ и $\overline{MN}=a_1=\sqrt{(3k)^2+(2k)^2}=\sqrt{13k^2}$. За односот на плоштините имаме $\frac{P}{P_1}=\frac{a^2}{a_1^2}=\frac{25k^2}{13k^2}=\frac{25}{13}$.



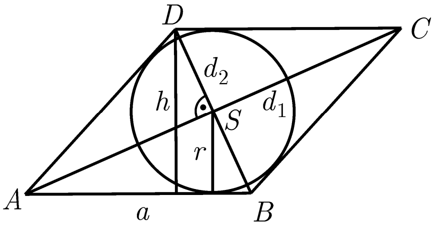
5. Од Питагоровата теорема имаме $\overline{AC}=\sqrt{8^2+6^2}=10cm$, па од равенството $P=rs$ за радиусот на впишаните кружници имаме $r=2cm$. Четириаголникот $MNPQ$ е правоаголен трапез, каде P и Q се центрите на впишаните кружници, а N и M се нивните подножја на страната AB од правоаголникот, соодветно. Според тоа $\overline{PQ}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}cm$.



6. $b=\frac{L}{2}-a=\frac{124}{2}-12=50dm$ и $\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}=\frac{50}{12}=\frac{25}{6}$.

7. Бидејќи дијагоналите се и симетрали на аглите во ромбот следува дека центарот на впишаната кружница е во пресекот на дијагоналите. Според тоа $h=2r=4{,}8\,\text{cm}$.

За плоштината имаме $P=ah=\frac{d_1d_2}{2}$, т.е. $4{,}8a=\frac{6d_1}{2}$ и оттука добиваме дека $d_1=1{,}6a$.



Од правоаголниот триаголник ABS добиваме дека $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=a^2$, т.е. $d_1^2+d_2^2=4a^2$, па следува дека $(1{,}6a)^2+6^2=4a^2$, па $a=5\,\text{cm}$.

Значи, плоштината е $P=ah=4{,}8\cdot 5=24\,\text{cm}^2$.

8.2.

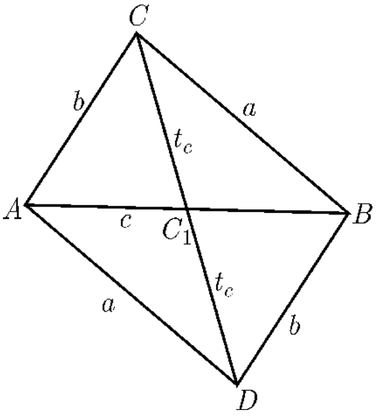
1. $P=\sqrt{24\cdot 3\cdot 7\cdot 14}=\sqrt{7056}=84$, каде $s=\frac{a+b+c}{2}=24$, $h_a=\frac{2P}{a}=8$, $h_b=\frac{2P}{b}=\frac{168}{17}$ и $h_c=\frac{2P}{c}=16.8$, $r=\frac{P}{s}=\frac{84}{24}=\frac{7}{2}$, $R=\frac{abc}{4P}=\frac{85}{8}$ и $L=2s=48$.

2. $P=\frac{ah_a}{2}=60\text{cm}^2$, $h_a=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12\text{cm}$, $h_b=\frac{2P}{b}=\frac{120}{13}\approx 9{,}2\text{cm}$, $r=\frac{P}{s}=\frac{10}{3}\text{cm}$, каде $s=\frac{a+2b}{2}=18\text{cm}$, $R=\frac{ab^2}{4\frac{bh_b}{2}}=\frac{ab}{2h_b}=\frac{130}{\frac{240}{13}}=\frac{169}{24}\text{cm}$ и $L=2s=36\text{cm}$.

3. Нека $a=29\text{cm}$, $b=27\text{cm}$ и $t_c=\overline{CC_1}=26\text{cm}$. Нека D е точка колинеарна со C и C_1 таква што $\overline{CD}=2t_c$. Тогаш $\Delta AC_1C\cong BC_1D$ и $\Delta AC_1D\cong\Delta BC_1C$ (бидејќи $\overline{AC_1}=\overline{C_1B}=\frac{c}{2}$, $\overline{CC_1}=\overline{C_1D}=t_c$ и $\sphericalangle AC_1C=\sphericalangle DC_1B$), па четириаголникот $ADBC$ е паралелограм. Затоа бараната плоштина е

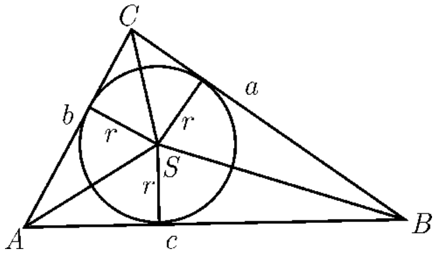
$$P_{\Delta ABC}=\frac{P_{ADBC}}{2}=\frac{2P_{\Delta ADC}}{2}=P_{\Delta ADC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-2t_c)}$$ каде

$s=\frac{a+b+2t_c}{2}=54\text{cm}$. Сега, $P_{\Delta ABC}=\sqrt{54\cdot 27\cdot 25\cdot 2}=270\text{cm}^2$.

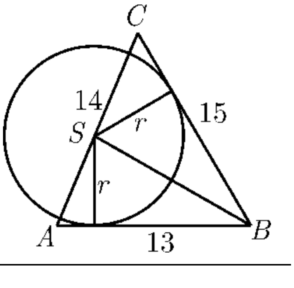


4. Бидејќи $P_{\Delta ASB}=36=\frac{cr}{2}$, $P_{\Delta ASC}=40=\frac{br}{2}$ и $P_{\Delta CSB}=68=\frac{ar}{2}$ добиваме $cr=72$, $br=80$ и $ar=136$ и оттука $a:b:c=136:80:72=17:10:9$. Значи, $a=17k$, $b=10k$ и $c=9k$, и притоа $k>0$ е коефициент на пропорционалност. Ако s е полупериметарот на триаголникот, тогаш $s=\frac{a+b+c}{2}=18k$.

Плоштината на триаголникот е 144cm^2, па од Хероновата формула добиваме $144=\sqrt{18k\cdot 9k\cdot 8k\cdot k}$, т.е. $144=36k^2$. Оттука $k=2$. Сега, страните се $a=34\text{cm}$, $b=20\text{cm}$ и $c=18\text{cm}$.

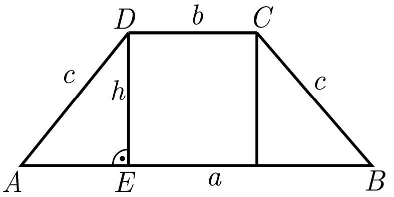


5. Нека $a=15\text{cm}$, $b=14\text{cm}$ и $c=13\text{cm}$. Плоштината на триаголникот е $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=84\text{cm}^2$. Нека S е центарот на таа кружница и r е нејзиниот радиус. Тогаш



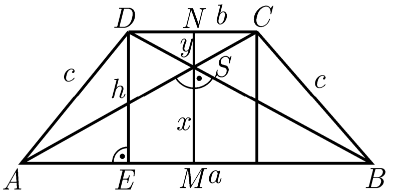
$P = P_{\Delta ABS} + P_{\Delta SBC} = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2}$, т.е. $84 = 14r$. Следува дека $r = 6\text{cm}$.

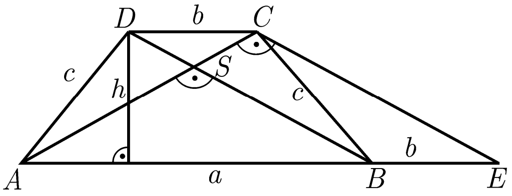
8.3.



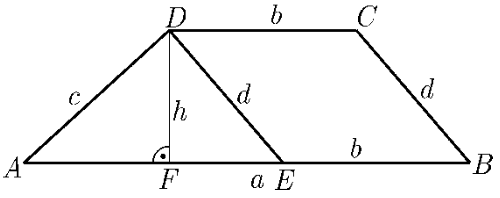
1. Според цртежот ΔAED е рамнокрак правоаголен, па $\overline{AE} = 3cm$, односно должината на поголемата основа е $a = 2 \cdot 3 + 12 = 18cm$, па $P = \frac{(18+12)\cdot 3}{2} = 45cm^2$.

2. 1 начин. Да го означиме пресекот на дијагоналите со S. Тогаш ΔABS е рамнокрак правоаголен со висина $\overline{SM} = x$, па од Евклидовите теореми следува $x^2 = \overline{AM} \cdot \overline{MB}$ т.е. $x = 10cm$. Аналогно од ΔCDS следува дека $y = \overline{SN} = 6cm$. Конечно $h = x + y = 16cm$, па $P = \frac{(20+12)\cdot 16}{2} = 256cm^2$.





2 начин. Ако низ точката C повлечеме права паралелна со BD до пресекот со продолжението на AB во точка E, тогаш $BECD$ е паралелограм, а ΔAEC е рамнокрак правоаголен со хипотенуза $\overline{AE} = 32cm$, па од Евклидовите теореми $h^2 = \left(\frac{32}{2}\right)^2$ т.е. $h = 16cm$. Конечно за плоштината на трапезот имаме $P = \frac{(20+12)\cdot 16}{2} = 256cm^2$.



3. Нека E е точка од страната AB таква што $\overline{EB} = b$. Тогаш $EBCD$ е паралелограм и $\overline{DE} = d$. Следува дека $\overline{AE} = a - b = 9\text{cm}$. Сега можеме да ја пресметаме висината на трапезот (таа е и висина во триаголникот AED).

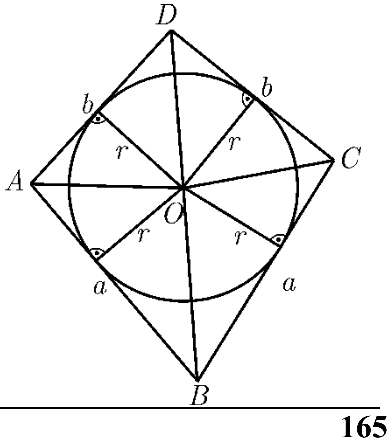
Имаме $s = \frac{9+17+10}{2} = 18$, па

$P_{\Delta AED} = \sqrt{18(18-9)(18-17)(18-10)} = 36\text{cm}^2$.

Следува $\frac{h(a-b)}{2} = 36$, т.е. $9h = 72$, па $h = 8\text{cm}$.

Плоштината на трапезот е

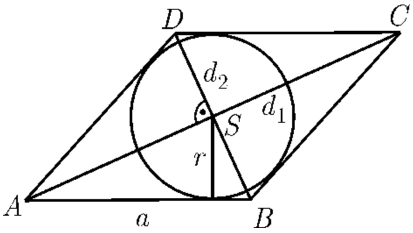
$P = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{31\cdot 8}{2} = 124\text{cm}^2$.



4. Нека $a = 5$, $b = 4$, $r = 2$ и нека O е центарот на впишаната кружница во делтоидот. Тогаш бараната плоштина е

$P = P_{\Delta AOB} + P_{\Delta BOC} + P_{\Delta COD} + P_{\Delta DOA} =$

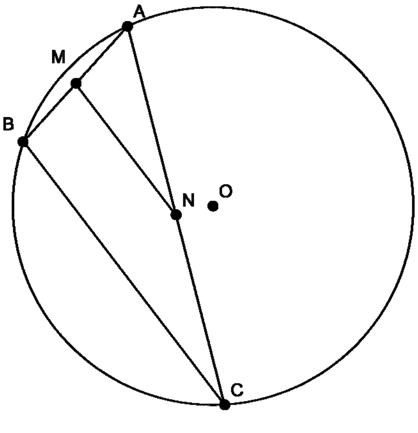
$= \frac{r}{2}(2a+2b) = r(a+b) = 18.$

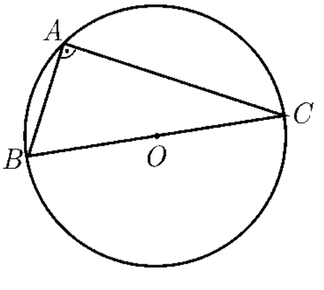


5. Познато е дека $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$, од каде $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$. Бидејќи во ромбот е впишана кружница со радиус r имаме $h = 2r$, па за плоштината на ромбот важи равенството $\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = a \cdot 2r$, од каде се добива дека $d_1 \cdot d_2 = 4ar$. Од условот на задачата имаме $6a = d_1 + d_2$. Со квадрирање на ова равенство и со замена на $d_1 \cdot d_2 = 4ar$ се добива $4a^2 - ar = 0$, од каде $a(4a - r) = 0$. Значи може $a = 0$, што не е можно затоа што а е должина на страната на ромб, па мора $a = \frac{r}{4}$.

8.4.

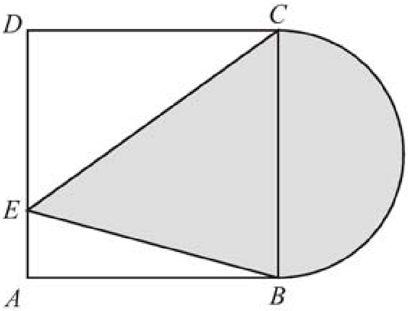
1. Да ги означиме тетивите $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$ и $\overline{AC} = 17\,\text{cm}$ и нивните средишни точки со M и N, соодветно. Отсечката MN е средна линија во триаголникот ABC, па $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$ т.е. $\overline{BC} = 10\,\text{cm}$. Со помош на Хероновата формула $P_{\Delta ABC} = 36\,\text{cm}^2$, па $R = \frac{abc}{4P} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 17}{4 \cdot 36} = \frac{85}{8}\text{cm}$

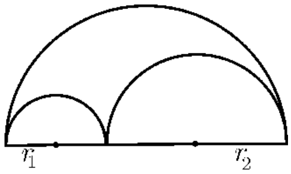




2. Бидејќи ΔABC е правоаголен, кружницата е опишана за него и нејзиниот центар лежи на средината на хипотенузата BC. Од Питагоровата теорема имаме дека $\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10cm$, па радиусот на кружницата е $r = 5cm$, а бараната плоштина е $P = 25\pi cm^2$.

3. Плоштината на исенчената фигура е збир од плоштините на половина круг со радиус $r=\frac{\overline{BC}}{2}=\frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{2}=\sqrt{2}cm$ и триаголник со основа $a=2\sqrt{2}$ и висина $h=\overline{AB}=2\sqrt{2}cm$. Според тоа плоштината на фигурата е
$P=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2\pi+\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2=(\pi+4)cm^2$.





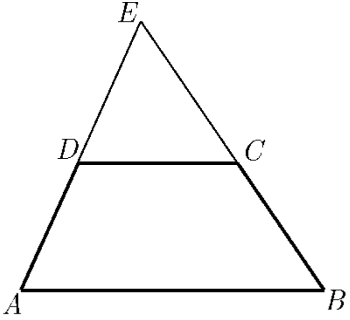
4. Според цртежот, имаме $r_1+r_2=R$, па со квадрирање на ова равенство се добива $r_1^2+2r_1r_2+r_2^2=R^2$. Плоштината на остатокот е разлика од плоштината на полукругот и збирот од плоштините на двата полукруга, па $P=\frac{R^2\pi}{2}-\left(\frac{r_1^2\pi+r_2^2\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(R^2-r_1^2-r_2^2\right)=r_1r_2\pi$ т.е.

$P=21\pi cm^2$

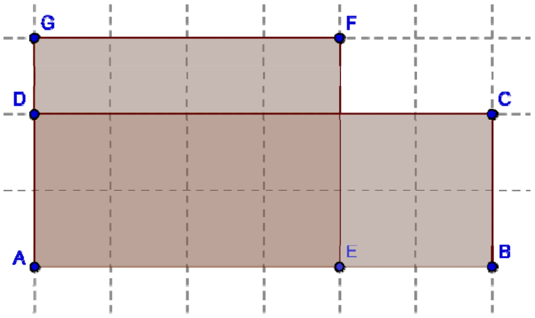
5. $P=4cm^2$

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Нека $\overline{AD}=c=8$ и $\overline{DE}=x$, каде E е пресек на краците на трапезот. Од сличноста $\Delta ABE\sim\Delta DCE$ имаме $\frac{25}{15}=\frac{8+x}{8}$. Од ова добиваме $x=12$. Од условот на задачата $\sphericalangle AEB=90^\circ$. Од питагоровата теорема за правоаголниот триаголник ΔDCE имаме $\overline{CE}=9$. Од питагоровата теорема за правоаголниот триаголник ΔABE имаме $\overline{BE}=15$. Сега добиваме $\overline{BC}=6$. Па за периметарот на трапезот имаме $L=54$. За плоштината на трапезот добиваме $P=P_{ABE}-P_{DCE}=150-54=96$.



2. Да го означиме стариот правоаголник $ABCD$, каде $\overline{AB}=a$ и $\overline{BC}=b$. Од условот на задачата имаме $a=3b$. Ако, пак, со $AEFG$ го означиме новиот правоаголник, тогаш $\overline{AE}=\overline{AB}-18=3b-18$ и $\overline{EF}=\overline{BC}+8=b+8$.



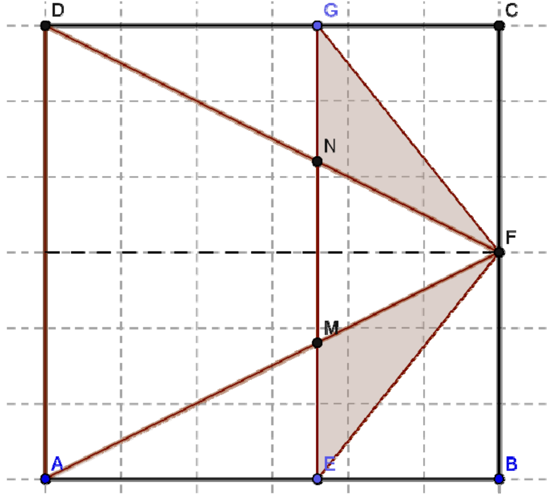
Бидејќи за боење ќе искористиме исто количество боја, имаме: $P_{ABCD}=P_{AEFG}$ т.е. $3b^2=(3b-18)(b+8)$, односно $3b^2=3b^2+24b-18b-144$, па $b=24cm$.

Според тоа $L_{AEFG}=2(3\cdot 24-18+24+8)=172cm$.

3. Според условите од задачата

$$P_{\Delta GEF}=\frac{36\cdot 12}{2}=216cm^2.$$

Ако ги означиме со M,N пресечните точки на GE со страните AF,DF, соодветно, тогаш бараната плоштина $P=P_{\Delta GEF}-P_{\Delta NMF}$. Значи останува да ја одредиме плоштината на триаголникот NMF.



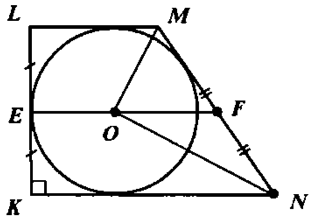
Триаголниците ABF и AEM се слични па важи: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EM}}$ т.е. $\frac{36}{18}=\frac{36-12}{\overline{EM}}$, односно $\overline{EM}=12cm$. Аналогно триаголниците DFC и DNG се слични, па $\overline{GN}=12cm$. Значи $\overline{MN}=36-2\cdot 12=12cm$. Конечно $P_{\Delta NMF}=\frac{12\cdot 12}{2}=72cm^2$, па $P=P_{\Delta GEF}-P_{\Delta NMF}=216-72=144cm^2$.

4. 1 начин. Бараната плоштина е збир од плоштините на правоаголник со страни $10cm$ и $2cm$, правоаголен триаголник со катети $6cm$ и $8cm$ и правоаголник со страни $8cm$ и $4cm$. Според тоа $P=20+24+32=76cm^2$.

2 начин. $P=10\cdot 10-\frac{6\cdot 8}{2}=76cm^2$.

5. Триаголникот BCE е рамнокрак правоаголен, па $\overline{CE}=\overline{BE}=\sqrt{2}m$. Притоа $\overline{AE}=4-\sqrt{2}, \overline{DE}=4+\sqrt{2}$. Значи

$$\overline{AD}=\sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2+\left(4+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{16-8\sqrt{2}+2+16+8\sqrt{2}+2}=\sqrt{32+4}=6m$$



6. Нека O е центарот на кружницата. Тогаш MO и NO се симетрали на аглите кај темињата M и N, па

$\sphericalangle OMN+\sphericalangle ONM=\frac{1}{2}\sphericalangle KNM+\frac{1}{2}\sphericalangle LMN=\frac{1}{2}180^0=90^0$,

па ΔOMN е правоаголен. Следува $\overline{MN}=10$.

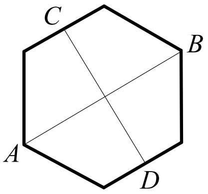
Нека h е висина во ΔOMN спуштена од O. Тогаш

$P_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=\frac{1}{2}10h$, т.е. $h=4,8$. Значи и $\overline{LE}=\overline{EK}=4,8$, па $\overline{LK}=9,6$.

Бидејќи трапезот е тангентен следува дека $\overline{KL}+\overline{MN}=\overline{LM}+\overline{KN}$, т.е. $\overline{LM}+\overline{KN}=9,6+10=19,6$. Конечно, $\overline{EF}=\frac{19,6}{2}=9,8$.

7. Ако a е должината на страната на шестаголникот, од условот на задачата имаме

$$60=6\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\qquad a^2=\frac{40}{\sqrt{3}},\text{ т.е. } a=\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}.$$



Според тоа, $\overline{AB}=2a=2\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}$. Отсечката CD има должина $\overline{CD}=2h$, каде h е висина на рамностран триаголник со страна a. Според тоа $\overline{CD}=2h=2\frac{a\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}$.

Конечно, $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=2\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3}\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}=2\cdot 40=80$.

8. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$**.**

9. 90. **10.** $15cm$ **. 11.** $48cm^2$ **. 12.** $P=84\pi$ **. 13.** $\sqrt{2}:2$ **14.** $18\sqrt{3}$

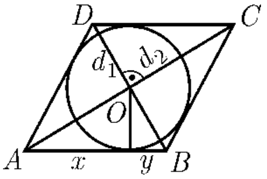
15. $a=\frac{2}{3}r$. **16.** $1024cm^2$**. 17.** $\frac{P}{P_1}=\frac{a^2}{a_1^2}=\frac{25k^2}{17k^2}=\frac{25}{17}$**. 18.** $P=48cm^2$ **.**

19. 1 случај. Центарот на кружницата лежи на висината CD на триаголникот ABC. Да означиме $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AO}=R$. Тогаш $\overline{AD}=\frac{a}{2}$ и ΔADC и ΔADO се правоаголни, па од питагоровата теорема имаме $\overline{CD}^2=b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ и $R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\overline{OD}^2$. Бидејќи $\overline{OD}=\overline{CD}-\overline{CO}=\overline{CD}-R$ имаме $R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-2R\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}+R^2$ т.е. $b^2-2R\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=0$ од каде

$$R=\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

2 случај. Центарот на кружницата лежи на продолжението на висината CD на триаголникот ABC. Да означиме $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AO}=R$. Тогаш $\overline{AD}=\frac{a}{2}$ и ΔADC и ΔADO се правоаголни, па од питагоровата теорема имаме $\overline{CD}^2=b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ и $R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\overline{OD}^2$. Бидејќи $\overline{OD}=\overline{CO}-\overline{CD}=R-\overline{CD}$ имаме

$R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+R^2-2R\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}+b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ т.е. $b^2-2R\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=0$ од каде $R=\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$. Конечно изразот за радиусот на опишаната кружница не зависи од видот на триаголникот.



20. Јасно е дека $a^2=\left(\frac{30}{2}\right)^2+\left(\frac{40}{2}\right)^2$ т.е. $a=25cm$. Од равенствата $h=2r$ и $ah=\frac{d_1d_2}{2}$ имаме дека $r=\frac{d_1d_2}{4a}=12cm$.

Бидејќи ΔABO е правоаголен, од Евклидовите теореми имаме $r^2=xy$, каде x и y се деловите од страната на ромбот добиени од допирната точка на впишаната кружница. Поголемиот дел од страната ќе го добиеме како решение на системот $\begin{cases}x+y=25\\ xy=144\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=25-x\\ x^2-25x+144=0\end{cases}$.

Имаме $x_1=16cm$, $x_2=9cm$ и соодветно $y_1=9cm$, $y_2=16cm$. Јасно поголемиот дел е долг $16cm$.